

## DÜZGÜN OLMAYAN SINIRLAR İÇİN BİR DALGA MODELİ

Barış BARLAS<sup>1</sup> ve Serdar BEJİ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Deniz Harp Okulu, Tuzla, İstanbul

<sup>2</sup>İ.T.Ü. Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Maslak, İstanbul

### ÖZET

Bu çalışmada, derin ve sıçrılı sularda, lineer olmayan karışık dalgalar için geçerli olan Beji-Nadaoka denklemleri, kartezyen hız bileşenleri bağılı değişkenler kalmak üzere, kartezyen koordinatlardan genel eğrisel koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Böylece, sınırları düzgün olmayan, marina, göl, vb. gibi bölgelerde denklemlerin sayısal çözümü daha hassas olarak yapılabilmektedir. Sayısal çözüm yöntemi olarak sonlu farklar yöntemi uygulanmış, yatay hız bileşenleri momentum denklemleri yardımı ile ADI metodу kullanılarak, serbest su yüzeyi dalga deformasyonu ise süreklilik denkleminden elde edilmiştir. Geliştirilen sayısal model literatürde rapor edilen deneylerin simülasyonlarında kullanılmış ve elde edilen sonuçların verilen ölçüm değerleri ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

### ABSTRACT

In this study, the nonlinear wave model of Beji-Nadaoka is re-expressed in boundary fitted non-orthogonal curvilinear co-ordinate system for treating the irregular boundaries accurately. The co-ordinate transformation converts an irregular physical domain into a rectangular computational domain that can be handled easily. Thus, the condition of zero normal velocity on the irregular vertical enclosures surrounding a typical physical domain, such as a port or harbour, is satisfied accurately. This improved numerical treatment of the boundaries increase the accuracy of wave model predictions of the velocities and pressure inside the domain and on the vertical enclosures. This in turn results in better estimation of wave motions and forces. The resulting set of transformed wave equations is discretized by the method of finite-differences and the numerical model is used for simulating experiments reported in the literature. Results obtained appear quite realistic and give confidence for practical applications of the model introduced.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada kullanılan dalga modeli, lineer olmayan karışık dalgalar için her türlü derinlikte geçerli Beji-Nadaoka modelidir [1,2]. Bu model, temelde üç boyutlu olan genel dalga problemini yatay hız vektörünün derinlige bağımlılığını temsil eden belirli bir fonksiyon seçilerek ve Galerkin yöntemi kullanılarak iki boyutlu probleme indirgemektedir. Dalga modeli çok derin sularda 2. dereceden Stokes dalgalarını analitik çözüm olarak kabul etmekte, çok sıç.sularda da knoidal ve solitary dalgaları modellemektedir. Böylece bir tek dalga modeliyle derin sulardan sıç sulara ilerleyen nonlineer dalgalar modellenebilmektedir. Dalga modeline ait süreklilik ve momentum denklemleri kartezyen koordinatlarda şu şekildedir,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{C_p^2}{g} + \zeta \right) \vec{u} \right] = 0 \quad (1.1)$$

$$C_p C_g \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + C_p^2 \nabla \left[ g\zeta + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{u} + w^2) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \left( \frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2} \right) (\nabla \cdot \vec{u}) \right] \quad (1.2)$$

burada  $\vec{u}(\mu, v)$ ,  $z=0$ 'da yatay hız vektörü,  $w$ ,  $z=0$ 'da hızın düşey bileşenidir.  $\zeta$  herhangi bir anda ve konumda su yüzeyi deformasyonu,  $h(x, y)$ ,  $z=0$  serbest su seviyesinden ölçülen su derinliğini ve  $\nabla(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  yatay gradyent operatörünü temsil etmektedir.  $C_p$ ,  $C_g$ , ve  $k$  sırasıyla, seçilen bir  $\omega$  frekansı ve verilen  $h$  derinliği için lineer teoriye göre hesaplanan faz hızı, grup hızı ve dalga sayısıdır.

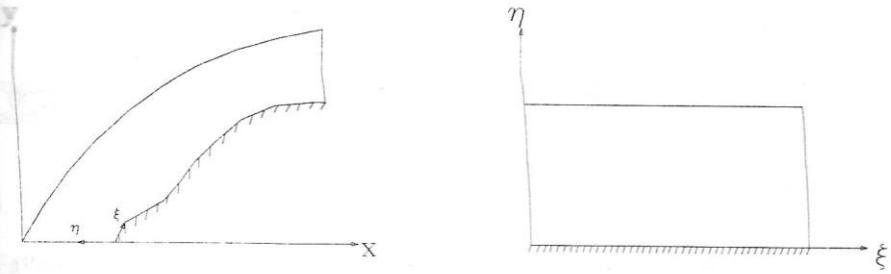
Eldeki problemin özelliklerine bağlı olarak, daha iyi bir çözüm elde etmek için, hareketi belirleyici temel denklemlerin özel bir koordinat sisteminde yazılması gerekebilir. Örnek olarak, kartezyen koordinat sistemi, dikdörtgen türü sınırlar için en uygunudur. Benzer şekilde, dairesel sınırlar için, silindirik koordinatlar en uygun seçimdir. Pratik uygulamalarda genellikle düzensiz geometrik bölgeler söz konusudur; dolayısıyla, yukarıda kareköken koordinatlarda ifadeleri verilen denklemleri düzensiz sınırlar için en uygun seçim olan eğrisel koordinat sisteminde ifade etmek genel uygulamalar için gereklidir.

## 2. KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

### Koordinat transformasyonu,

$$\tau \equiv t, \quad \xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t) \quad (2.1)$$

olacak şekilde, kartezyen koordinatlardaki hareketi belirleyici diferansiyel denklemler genel eğrisel koordinat bileşenleri  $\xi$ ,  $\eta$  ve  $\tau$  cinsinden yazılır. Eğrisel koordinat sistemi  $(\xi, \eta)$ , Şekil 1'de şematik olarak verilmiştir. Burada  $\xi$  dalga ilerleme yönünde,  $\eta$  ise  $\xi$  hatlarına dik yönde seçilmiştir.



Şekil 1. Fiziksel bölge ve hesap bölgesi.

Hareket denklemleri  $(x, y, t)$  fiziksel bölgelerinden,  $(\xi, \eta, \tau)$  hesap bölgelerine aşağıdaki bağıntılar yardımı ile dönüştürülür. Kısmi türevler için zincir kuralını uygulayarak, kartezyen türevleri aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.2)$$

Yukarıdaki ifadelerde görünen metrikler ( $\xi_x, \eta_x, \dots$  vb.),  $d\xi, d\eta$ , ve  $dx, dy$ 'nin diferansiyel bağıntılarından elde edilir.

$$\xi_x = J \cdot y_\eta, \quad \xi_y = -J \cdot x_\eta, \quad \eta_x = -J \cdot y_\xi, \quad \eta_y = J \cdot x_\xi \quad (2.3)$$

dir. Burada  $J$ , dönüşümün Jakobyenidir:

$$J = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (2.4)$$

İkinci türevler, birinci türevlere zincir kuralı uygulanarak elde edilir, örneğin,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \right] = \xi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.6)$$

Koordinat dönüşümüne ait metrik terimler, 2. mertebeden sonlu farklar yaklaşımıyla sayısal olarak hesaplanmıştır. Eğrisel koordinat dönüşümüne ait ayrıntılar Hoffman ve Chiang [3]'da verilmektedir. Süreklik (1.1) ve momentum denklemleri (1.2) kartezyen hız bileşenleri bağıl değişkenler kalmak üzere, genel eğrisel koordinatlarda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Süreklik denklemi,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \xi_x \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial P}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0 \quad (2.7)$$

x-momentum denklemi:

$$C \cdot \xi_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \tau} + CX \cdot \xi_x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} - R \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} = RHSX \quad (2.8)$$

y-momentum denklemi:

$$C \cdot \eta_y^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^2 \partial \tau} + CY \cdot \eta_y \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \tau} - R \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} = RHSY \quad (2.9)$$

formlarını almaktadır. Burada  $u$  ve  $v$  kartezyen koordinatlarda sakin su seviyesindeki yatay hız bileşenleridir.  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $CX$ ,  $CY$ ,  $RHSX$  ve  $RHSY$  ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$P = \left( \frac{C_p^2}{g} + \zeta \right) \cdot u, \quad Q = \left( \frac{C_p^2}{g} + \zeta \right) \cdot v, \quad R = \frac{C_g}{C_p}, \quad C = \frac{C_p^2(1-R)}{\omega^2} \quad (2.10)$$

$$CX = \frac{1}{\omega^2} \left( \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} (C_p^2(1-R)) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} (C_p^2(1-R)) \right) \quad (2.11)$$

$$CY = \frac{1}{\omega^2} \left( \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} (C_p^2(1-R)) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} (C_p^2(1-R)) \right) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} RHSX &= \xi_x \frac{\partial S}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ &- C \cdot \left( \xi_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \eta_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \eta} + \xi_x \xi_y \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \xi^2} + \eta_x \eta_y \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \eta^2} + \xi_x \eta_y \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} + \eta_x \xi_y \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} \right) \\ &- C \cdot \left( + \eta_x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \eta^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} + \xi_{xx} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &- CX \cdot \left( \xi_y \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \eta_y \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \eta} + \eta_x \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} RHSY &= \xi_x \frac{\partial S}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ &- C \cdot \left( \xi_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + \eta_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \xi_x \xi_y \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi^2} + \eta_x \eta_y \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \eta^2} + \xi_x \eta_y \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} + \eta_x \xi_y \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} \right) \\ &- C \cdot \left( + \eta_x^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \eta^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^3 v}{\partial \tau \partial \xi \partial \eta} + \xi_{xx} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ &- CY \cdot \left( \xi_y \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + \eta_y \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \eta_x \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$S = g \cdot \zeta + \zeta \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.15)$$

Yukarıda verilen ifadelerle hareketi belirleyici diferansiyel denklemler eğrisel koordinat sisteminde tanımlanmış olmaktadır.

### 3. SAYISAL YÖNTEM

Eğrisel koordinatlarda (2.7)-(2.9) ile verilen süreklilik ve momentum denklemleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak ayıraltılmıştır. Tüm bilinmeyenler (serbest su yüzey deformasyonu, hız bileşenleri ve grid metrikleri) grid kesişme noktalarında hesaplanmaktadır ve hafızada tutulmaktadır. Uzay ve zamana ait tüm türevler ikinci mertebeden sonlu farklarla ifade edilmiştir. İlk olarak, tanımlanan hesaplama bölgesinde ağlama yapılmakta ve her bir grid kesişme noktasında metrik değerleri hesaplanarak hafızaya kaydedilmektedir. Daha sonra, herbir zaman adımı için program üç aşamada bilinmeyenleri bütün grid noktalarında hesaplamaktadır. Sırasıyla, x-momentum denklemi kullanılarak  $u$  hız bileşenleri, y-momentum denklemi kullanılarak  $v$  hız bileşenleri ve nihayet süreklilik denklemi kullanılarak serbest su yüzeyi deformasyonu değerleri elde edilmektedir. Hızların çözümü aşamasında oluşan tridiagonal matris ADI metodu kullanılarak hızlı bir şekilde çözülmektedir. Gerek x-momentum ve gerekse y-momentum denklemlerinin sağ tarafında yer alan ve yeni zaman adımına ait terimlerin hesaba katılması iteratif bir şekilde bu denklemlerin ikişer defa (daha fazla sayıda iterasyonun sonucu hissedilir düzeyde etkilemediği belirlenmiştir) çözülmesiyle gerçekleştirilmektedir.

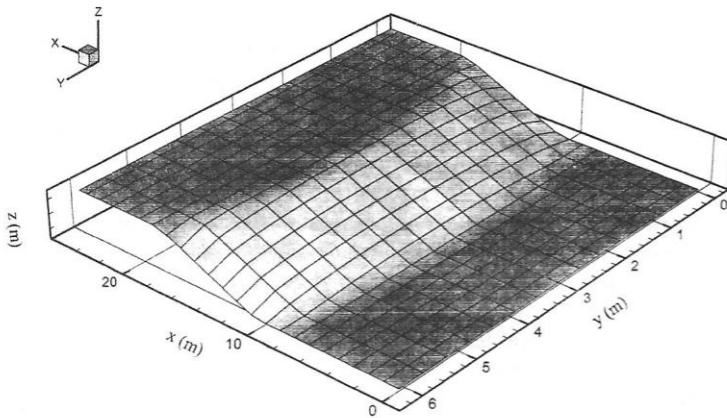
Serbest su yüzeyinde ve dipte sınır koşulları dalga denklemleri tarafından otomatik olarak sağlanmaktadır. Dalga geliş bölgesindeki sınırda istenilen dalga formu verilerek dalgalar hesaplama bölgesine girmektedir. Hesaplama bölgesini çevreleyen sınırlarda, duvar olduğu takdirde, "ayna yüzey" koşulu uygulanmaktadır, duvar olmayan çıkış bölgelerinde ise Engquist ve Majda [4]'nın ikinci mertebe radyasyon koşulu uygulanmaktadır.

### 4. SAYISAL SİMÜLASYONLAR

Gerçekleştirilen dalga modelinin test edilmesi için Whalin'in [5] yakınsak mercek görevi gören bir dip formu üzerinde ilerleyen lineer olmayan periyodik dalgalar için gerçekleştirdiği laboratuvar ölçümleri göz önüne alınmıştır. Ölçümlerde kullanılan dip formunun analitik ifadesi,

$$h(x, y) = \begin{cases} 0.4572, & 0 \leq x < 10.67 - G \\ 0.4572 + (10.67 - G - x) / 25, & 10.67 - G \leq x < 18.29 - G \\ 0.1524, & 18.29 - G \leq x \leq 21.34 \end{cases} \quad (4.1)$$

olarak verilmektedir. Burada  $G(y) = [y(6.096 - y)]^{1/2}$ ,  $0 \leq y \leq 6.096$  olup, tüm değişkenler metre cinsinden verilmiştir. Dip formuna ait perspektif görünüş Şekil 2'de verilmektedir.



**Şekil 2.** Dip formunun perspektif görünüşü.

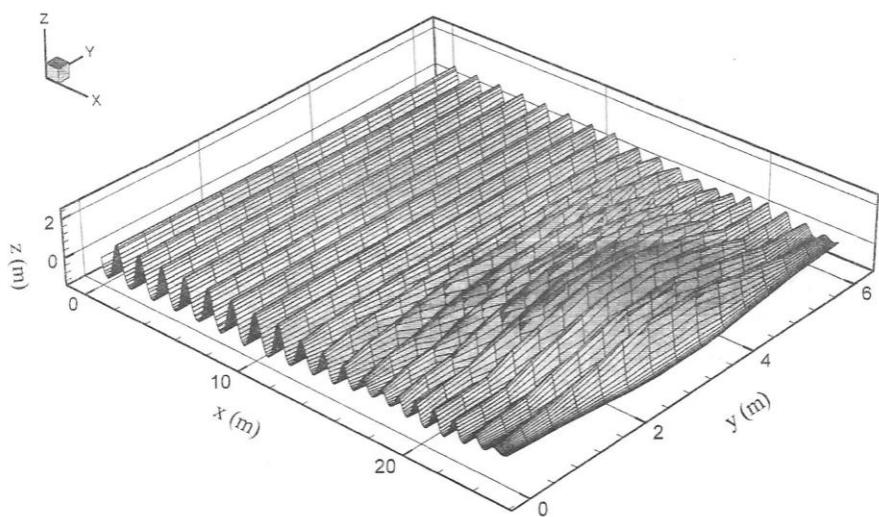
Deney ölçümlerine uygun olarak,  $T=1, 2$  ve  $3$  s periyodundaki dalgalar için üç farklı sayısal simülasyon yapılmış ve dalga tankının orta ekseni boyunca farklı istasyonlarda hesaplanan harmonik genlikler deneySEL ölçülen değerlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 3-5'te dalgaların perspektif görüntüsleri ve harmonik genlikler görülmektedir. Tablo 1'de sayısal simülasyonlara ait ayrıntılar verilmektedir.

**Tablo 1:** Sayısal simülasyon için testdataları

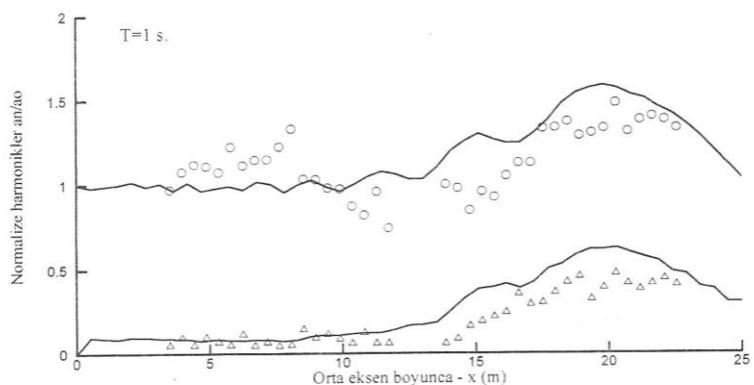
Periyod	$xl$ (m)	$yl$ (m)	$IM$	$JM$	$\Delta\tau$	Zaman adımı
$T=1$ s	46.80	6.096	900	14	$T/35$	1050
$T=2$ s	56.00	6.096	700	14	$T/40$	520
$T=3$ s	49.50	6.096	450	14	$T/45$	405

Yukarıdaki tabloda  $xl$  ve  $yl$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönünde hesaplama bölgesinin uzunluğunu,  $IM$  ve  $JM$  yine aynı yönlerde alınan grid sayısını,  $\Delta\tau$  hesaplamaların yapıldığı birim zaman adımını ve son kolon da hesap yapılan toplam zaman adımının sayısını vermektedir.

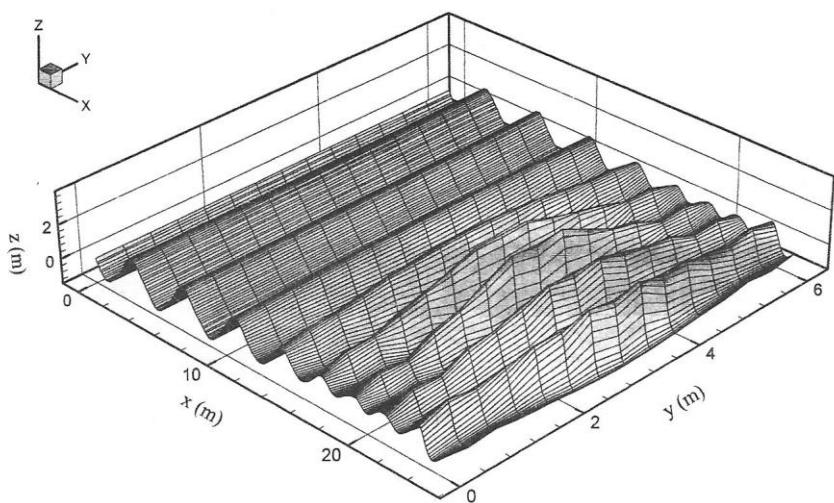
Şekil 6'da bir marina ağzından içeri giren  $T=5$  s periyodlu sinüsoidal dalgaların difraksiyonu farklı zaman adımlarında gösterilmektedir. Marina içinde su derinliği sabit 10 m alınmış ve giriş bölgesi dışında bütün duvarlarda “ayna koşulu” kullanılarak duvarlar “yansıtıcı duvar” olarak tanımlanmıştır. Gözlenen difraksiyon paterni, tipik olarak olması gereken formda olup dalgaların yarı-dairesel sayılabilcek ilerlemesi açıkça görülmektedir.



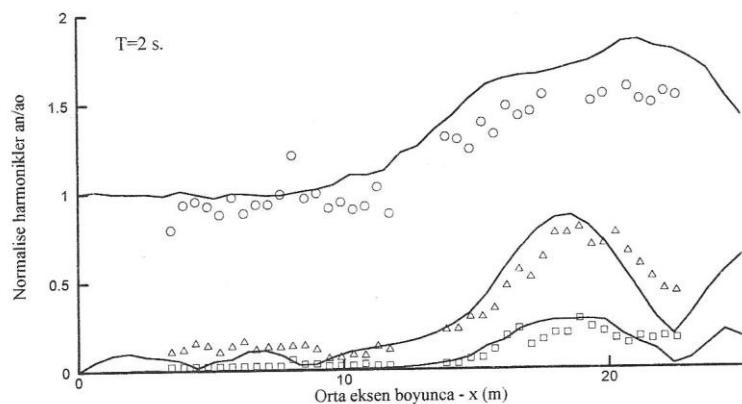
Şekil 3a.  $T=1$  s için oluşmuş dalgaların perspektif görünüşü.



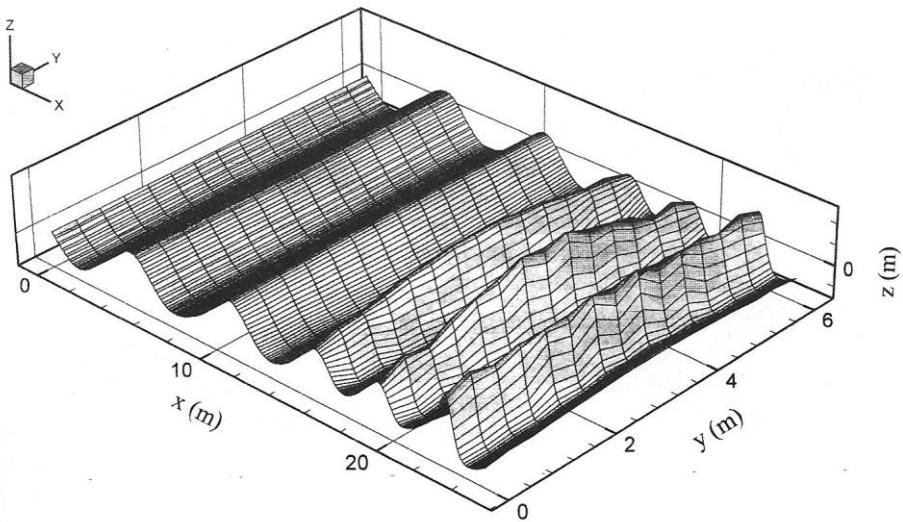
Şekil 3b.  $T=1$  s için Whalin'in (1971) ölçümleri ile hesaplamaların karşılaştırması. Noktalar deneyel ölçümleri, düz çizgiler hesaplamaları göstermektedir.



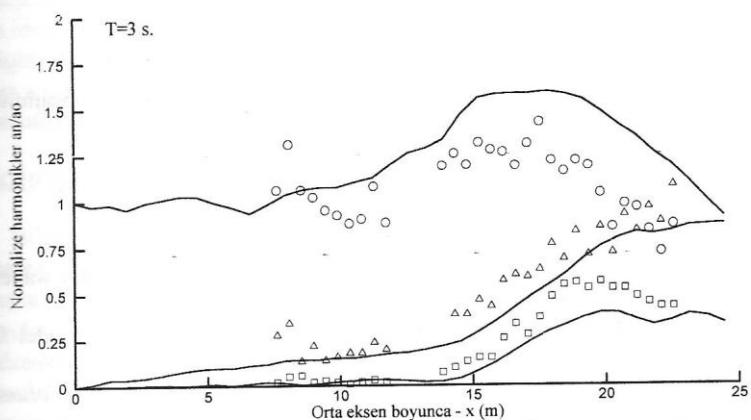
**Şekil 4a.**  $T=2$  s için oluşan dalgaların perspektif görünüşü.



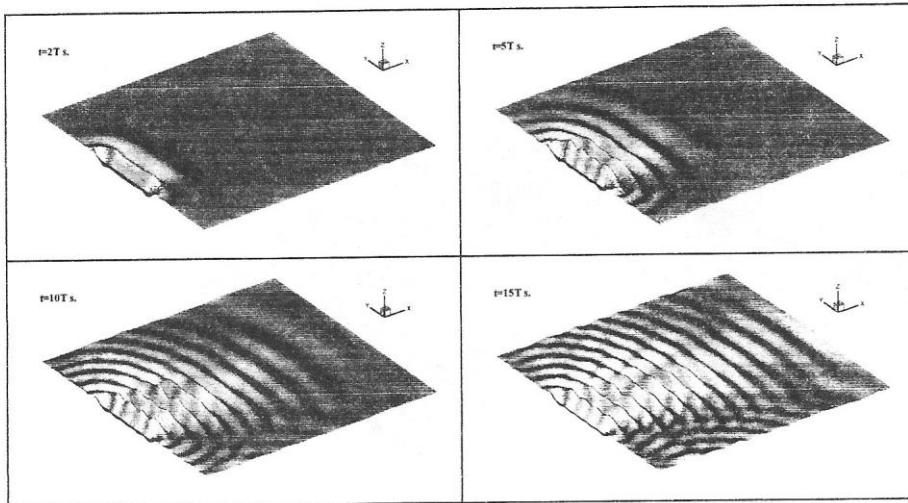
**Şekil 4b.**  $T=2$  s için Whalin'in (1971) ölçümleri ile hesaplamaların karşılaştırması. Noktalar deneysel ölçümleri, düz çizgiler hesaplamaları göstermektedir.



**Şekil 5a.**  $T=3$  s için oluşmuş dalgaların perspektif görünüşü.



**Şekil 5b.**  $T=3$  s için Whalin'in (1971) ölçümleri ile hesaplamaların karşılaştırması. Noktalar deneyel ölçümleri, düz çizgiler hesaplamaları göstermektedir.



**Şekil 6.** Bir marina içerisinde ilerleyen dalgaların simülasyonu

## 5. SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmada Beji-Nadaoka [1,2] tarafından verilmiş olan dalga modeli, denklemlerde kartezyen hız bileşenleri bağıl değişkenler kalmak üzere, kartezyen koordinatlardan genel eğrisel koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Bu şekilde sınırları düzgün olmayan, marina, göl, vb. gibi bölgelerde dalga deformasyonu değişik fizikselli sınırlar için kolaylıkla ve hassas olarak hesaplanabilir.

## 6. TEŞEKKÜR

Bu çalışma İ.T.Ü. Araştırma Fon Saymanlığı tarafından desteklenen proje kapsamında gerçekleştirılmıştır.

## KAYNAKLAR

- [1] Beji, S. ve Nadaoka, K., “A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves” *Proc. Royal Soc., London, Ser A*, Vol.453, pp. 319-332, 1997.
- [2] Nadaoka, K., Beji, S. ve Nakagawa, Y.; “A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves”, *Proc. Royal Soc., London, Ser A*, Vol.453, pp. 303-308, 1997.
- [3] Hoffmann, K.A. ve Chiang, S.T., “*Computational Fluid Dynamics for Engineers – Volume: 1, 2*”, Engineering Education System Publication, Wichita, 1995.
- [4] Engquist, B. ve Majda, A. “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves” *Math. Comp.*, Vol.31, pp. 629-651, 1977.
- [5] Whalin, R.W., *The Limit of Applicability of Linear Refraction Theory in a Convergence Zone*. Res. Rep. H-71-3, U.S. Army Corps of Engrs., Waterways Expt. Station, Vicksburg, M.S., 1971.