

HAREKET EDEN YARIMKÜRE ŞEKLİNDEKİ BİR CİSMİN OLUŞTURDUĞU DALGALARIN SAYISAL OLARAK MODELLENMESİ

Deniz BAYRAKTAR ERSAN¹ ve Serdar BEJİ²

ÖZET

Su dalgalarının teorik ve fiziksel modellenmesi, üzerinde onaltıncı yüzyıldan bu yana çalışılan bir konudur. Genel olarak rüzgâr etkisi ile oluşan açık deniz ve kıyı bölgesi dalgalarının yanı sıra su içindeki bir cismin (gemi v.b.) hareketinden ötürü oluşan dalgaların incelenmesi de önem taşımaktadır. Gemi hareketlerinden kaynaklanan dalgaların modellenmesi özellikle son yılların güncel konularındandır. Bu çalışmada, seyir halindeki tekneyi temsil edecek olan basınç alanı belirlenmiş ve bu basınç alanı ilerlediğinde oluşacak olan dalgalar bir bilgisayar programında sayısal olarak modellenmiştir. Lineer olmayan özellikteki bu dalgaları sayısal olarak modelleyebilmek için “Boussinesq Denklemleri” kullanılmıştır. Boussinesq denklemleri, derinlik integre edilmiş denklemler olup, dispersiyon terimleri kısmi olarak dikey yöndeki akışkan ivmesinin etkisini temsil eder. Boussinesq Denklemleri bu özellikleri ile uzun dalga denklemlerinden ayrılırlar. Bu sayede, çok sığ olmayan bölgelerde de, değişik hızlardaki teknelerin yarattığı dalgaların gerçekçi bir şekilde simülasyonu yapılmıştır. Hareket edecek olan basınç alanını temsilen bir yarımküre seçilerek, farklı Froude sayıları için, değişik zaman aralıklarında üç boyutlu simülasyonlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Boussinesq denklemleri, dalga şekilleri, giriş açısı, hareket eden basınç alanı

1 İstanbul Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Gemi ve Deniz Teknolojisi Mühendisliği Bölümü , Tel:0212 285 64 18, e-posta: bayraktard@itu.edu.tr

2 İstanbul Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Gemi ve Deniz Teknolojisi Mühendisliği Bölümü , Tel:0212 285 64 42, e-posta: sbeji@itu.edu.tr

1. Giriş

Su yüzeyinde hareket eden bir cismin (gemi v.b.) farklı hızlarda oluşturduğu lineer olmayan En önemli avantajı derinlik integre edilmiş bir dalga modeli olması olan Boussinesq denklemleri, üç boyutlu bir problemi iki boyutlu bir probleme indirgemektedir. Boyuttaki bu azalma ve bilgisayar teknolojisinin ilerlemesine paralel olarak, Boussinesq denklemleri farklı tipte dip batimetrisi ve kıyı şekilleri ile geniş yüzeyleri kaplayan bölgeler için yaygın olarak kullanılabilir. Sabit su derinlikleri için geçerli olan ilk Boussinesq modeli, adını aldığı Boussinesq [2] tarafından elde edilmiştir. Daha sonra, Mei and LeMehaute [9] ve Peregrine [12] de, Boussinesq denklemlerini sabit olmayan su derinlikleri için elde etmişlerdir. Mei and LeMehaute, tabandaki hızı değişken olarak tanımlarken, Peregrine derinliğe göre ortalaması alınmış hızı değişken olarak kullanmıştır. Peregrine tarafından türetilen denklemlerin yaygın kullanımından ötürü, bu denklemler standart Boussinesq denklemleri olarak bilinmektedir.

Daha iyi dispersiyon karakteristiğine sahip denklemler elde etmek için Madsen ve diğerleri [7] ve Madsen ve Sørensen [8] ayarlanabilir katsayılı yüksek mertebeden terimleri sırasıyla, sabit ve değişken su derinlikli Boussinesq denklemlerine eklemiştir. Beji ve Nadaoka [1], Madsen ve diğerlerinin [7] gelişmiş Boussinesq denklemlerini, farklı bir şekilde türetmişlerdir. Liu ve Wu [5] ise, sınır integrali yöntemini kullanarak bir dikdörtgen ve trapez kanal içinde hareketli bir basınç dağılımı tarafından üretilen dalgaları, gemiye özel uygulamalar içeren bir model olarak sunmuştur. Torsvik [13] Lynett ve diğerleri [6] ve Liu ve Wu'nun [5] COULWAVE uzun dalga modelini kullanarak, değişken kesitli bir kanalda sabit bir hızda hareket eden bir basınç dağılımının yarattığı dalgaları sayısal olarak incelemiştir. Bu ve bunun benzeri yapılmış olan çalışmalarda ortak nokta, hareket eden cisim olarak kosinüs tipinde bir fonksiyon seçilmesidir.

Hareketli bir basınç alanının teorik formülasyonunu incelemek, yüzen bir cisim istenilen formda elde edilebilirliği açısından oldukça önemlidir. Fakat Boussinesq denklemleri, boyut azaltılması açısından her ne kadar çok büyük avantaj sağlasa da yüzer cisimler söz konusu olduğunda doğrudan bir kullanım söz konusu olamamaktadır. Bu durumda, yapılabilecek iki farklı yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi, yüzer cismin dışında ve altında kalan bölgelerin ayrı ayrı değerlendirilmesi ve buna bağlı çözümlerin elde edilmesidir. Diğeri ise, uygulama açısından daha kolay olan, Boussinesq denklemlerine, yüzer cismin etkisini yansıtacak olan bir yüzey basınç teriminin eklenmesidir. Burada en önemli problem, yüzer cisme en uygun yüzey basıncının tanımlanmasıdır.

Bu çalışmada, farklı formda yüzey basınç alanları ile istenilen cisim/cisimlerin etkilerinin yaratılıp tanımlanması ve buna bağlı olarak yapılması planlanan simülasyonlar ile farklı durumlar incelenip birbiriyle karşılaştırılmıştır. Bu simülasyonlar, hareket halindeki bir gemi formunun yarattığı dalgalar ile bunların etkilerini anlayabilmek açısından oldukça önemlidir. Bunu gerçekleştirebilmek için, yüzey basınç terimlerinin, bir ve iki boyutlu (gerçekte iki ve üç boyutlu) olan Boussinesq sayısal modellerinin bir parçası haline getirilip uygulanması gerekmektedir.

Klasik Boussinesq denklemlerinin uygulama alanlarından farklı olarak bu araştırma konusu, kıyı ve liman bölgelerindeki dalga hareketlerinin incelenmesinin dışında, yüzer bir cisim veya cisimler etkisi altında oluşacak dalga hareketlerini de inceleyebilmeyi mümkün kılmaktadır.

İki boyutlu denklemlerle yarım küre şeklindeki bir cismin yarattığı dalgalar modellenmiştir. Bu simülasyonlar, teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. Gelişmiş Dispersiyon Karakteristikli Boussinesq Denklemleri

Bu çalışmada Beji ve Nadaoka [1] tarafından türetilen Boussinesq denklemleri kullanılmış olup, momentum denklemlerine, hareket edecek cismi temsil eden basınç gradyanı eklenmiştir:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta \\ = (1 + \beta)\frac{h}{2}\nabla[\nabla \cdot (h\mathbf{u}_t)] + \beta g\frac{h}{2}\nabla[\nabla \cdot (h\nabla\eta)] - (1 + \beta)\frac{h^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \\ - \beta g\frac{h^2}{6}\nabla(\nabla^2\eta) + \frac{\nabla p}{\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

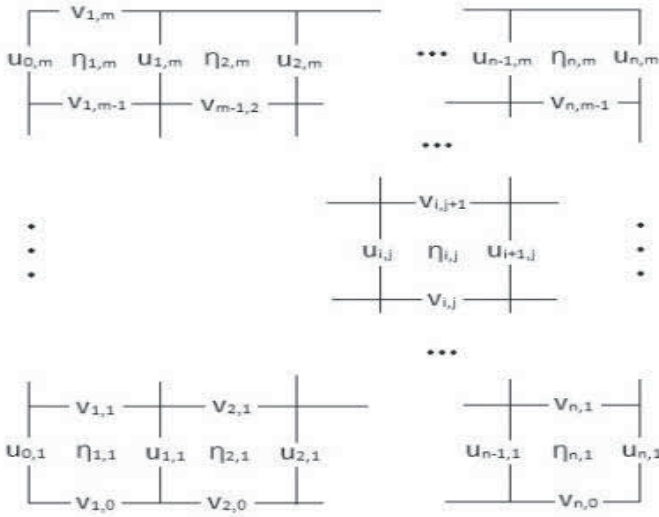
$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta)\bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (2)$$

Burada β bir sabit olup, lineer teori dispersiyon bağıntısının, ikinci mertebeden Padé açılımına göre $\beta=1/5$ alınmıştır. $\beta = 0$ ise Peregrine'nin orijinal denklemine karşılık gelmektedir.

$\beta = 1/5$ olduğunda, model nispeten kısa dalgaları ($h/\lambda = 1$) modelleyebilir. Burada, λ dalga boyu, h ise su derinliğini temsil etmektedir.

3. Denklemlerin Ayrıklaştırılması

Denklem 1 ve Denklem 2, atlatılmış Arakawa C-grid sistemine göre Şekil 1'de gösterildiği gibi ayrıklaştırılmıştır.



Şekil 1. Değerlerin atlatılmış Arakawa C- grid sistemindeki konumları

Ayrıklaştırma, O'Brien ve Hurlburt [11] tarafından iki tabakalı sığ su denklemlerinin çözümünde kullanılan yöntem uygun olarak, süreklilik denklemleri, momentum denkleminin içine yerleştirilerek gerçekleştirilmiştir. Böylesi bir düzenleme, sayısal programın sırasıyla, hem uzun dalga modunda, hem Boussinesq modunda, hem de gelişmiş Boussinesq modunda çalışabilmesine olanak verir. Buna göre süreklilik denklemleri,

$$\frac{n_{i,j}^{k+1} - n_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2}h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{k+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^k \right]_{i-\frac{1}{2},j} = - \left[h_x u_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + h_y v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} (\eta u)^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} (\eta v)^{k+\frac{1}{2}} + h \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

elde edilmiştir. Burada, i ve j sırasıyla x ve y yönündeki uzaysal zaman adımlarını gösterirken k , zaman adımını gösterir. Her iki taraf Δt ile çarpılıp x 'e göre türevi alındığındaysa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{i,j}^{k+1} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{i,j}^k - \frac{1}{2} h \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{k+1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^k \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t - 2h_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \Delta \\
&\quad - h_y \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - h_x \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta u)_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\eta v)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t
\end{aligned} \tag{4}$$

Buna benzer olarak Denklem 3, Δt ile çarpılıp, y 'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{i,j}^{k+1} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{i,j}^k - \frac{1}{2} h \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^k \right]_{i-\frac{1}{2},j} \Delta t - 2h_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t \\
&\quad - h_x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - h_y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta \\
&\quad - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\eta u)_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\eta v)_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Delta t
\end{aligned} \tag{5}$$

denklemleri elde edilir. Denklem 4 ve 5, sırasıyla x ve y momentum denklemlerinin ayrıklaştırılması için kullanılacaklardır. Momentum denkleminin x bileşeni şu şekilde ayrıklaştırılır:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2} g \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^k \right]_{i+\frac{1}{2},j} &= (1 + \beta) \frac{h^2}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{k+1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^k \right] \frac{1}{\Delta t} \\
+ (1 + \beta) h h_x \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{k+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k \right]_{i+\frac{1}{2},j} &\frac{1}{\Delta t} - (u u_x)^{k+\frac{1}{2}} \\
- (v u_y)^{k+\frac{1}{2}} + (1 + \beta) \frac{h^2}{3} v_{xyt} + \frac{1}{2} (1 + \beta) h h_x v_{yt} & \\
+ \frac{1}{2} (1 + \beta) h h_y v_{xt} + g \beta \frac{h^2}{3} \eta_{xxx} + g \beta h h_x \eta_{xx} & \\
+ g \beta \frac{h^2}{3} \eta_{xyy} + \frac{1}{2} g \beta h h_x \eta_{yy} + \frac{1}{2} g \beta h h_y \eta_{xy} \frac{1}{\rho} p_x &
\end{aligned} \tag{6}$$

Burada, ayrıklaştırılmamış olarak verilen terimler, Arakawa C-grid sistemine göre $k + 1/2$ zaman adımında ayrıklaştırılacaktır. Denklem 4'teki $\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{i,j}^{k+1}$ ifadesini yukarıdaki denklemin içine yerleştirdikten sonra, Δt ile çarpıp düzenlenirse elde edilecek olan denklem,

$$\begin{aligned}
& h \left[\frac{1}{3}(1 + \beta)h + \frac{1}{4}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{k+1} + h_x \left[(1 + \beta)h + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \\
& = h \left[\frac{1}{3}(1 + \beta)h - \frac{1}{4}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + h_x \left[(1 + \beta)h - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
& \quad - u_{i,j}^k + g \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^k - \frac{1}{2}h_x \left[(1 + \beta)h + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{k+1} \\
& \quad + \frac{1}{2}h_x \left[(1 + \beta)h - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^k - \frac{1}{2}h_y \left[(1 + \beta)h + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{k+1} \\
& \quad + \frac{1}{2}h_y \left[(1 + \beta)h - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^k - h \left[\frac{1}{3}(1 + \beta)h + \frac{1}{4}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^{k+1} \\
& \quad + h \left[\frac{1}{3}(1 + \beta)h - \frac{1}{4}g\Delta t^2 \right] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^k + \left[(uu_x)^{k+\frac{1}{2}} + (vu_y)^{k+\frac{1}{2}} \right] \Delta t \\
& \quad - g\beta h \Delta t \left[\frac{h}{3}(\eta_{xxx} + \eta_{xyy}) + h_x \left(\eta_{xx} + \frac{1}{2}\eta_{yy} \right) + \frac{1}{2}h_y \eta_{xy} \right] \\
& \quad - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta u)^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\eta v)^{k+\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{\rho} p_x \Delta t \tag{7}
\end{aligned}$$

olur. Aynı işlemler y-momentum denklemi için de yapıldığından burada tekrar edilmemiştir.

Sayısal çözüm sırası şu şekildedir. Öncelikle, eski zamandaki hızlar kullanılarak, geçici η değerleri, süreklilik denklemi 3'ten hesaplanır. Buna bağlı olarak, x ve y yönündeki momentum denklemleri, yeni zamandaki u ve v hızları için, tridiyagonal bir matris sistemi oluşturur. Hareket denkleminin x- bileşeni çözülürken, yeni zaman adımındaki u^{k+1} değerleri tek bilinmeyenler olup, Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Benzer şekilde, hareket denkleminin y-bileşeni çözülürken, yalnızca v^{k+1} 'ler bilinmeyen olarak değerlendirilir. Son hesaplanan u^{k+1} ve v^{k+1} değerleri kullanılarak, düzeltilmiş η değerleri yeniden süreklilik denkleminde elde edilir. Güvenilir sonuçlar elde etmek için, her bir zaman adımında, bu işlemlerin yalnızca üç kez tekrarlanmasının yeterli olduğu gözlemlenmiştir. Daha iyi bir yaklaşım için, değişkenlerin ardışık değerleri bir yakınsama kriteri ile karşılaştırılmıştır. Fakat sayısal deneyler göstermiştir ki, iterasyonun artmasının sonuçlar üzerinde iyileştirici bir etkisi kesinlikle ihmal edilebilir düzeyde kalmaktadır.

4. Üç Boyutlu Sayısal Çözümler

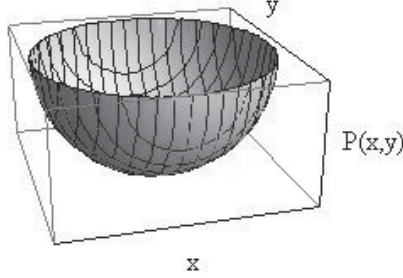
Hareket eden basınç alanına bağlı olarak oluşan dalgaların iki boyutlu (gerçekte 3 boyutlu) simülasyonları yapılmıştır. Bu amaçla, öncelikle üç boyutlu bir yarım küre şeklindeki bir basınç alanı oluşturulmuştur. Daha sonra, söz konusu basınç alanı kullanılarak yapılan sayısal simülasyonlardan farklı derinlik Froude sayıları için elde edilen giriş açıları ölçülmüş ve her bir açı Havelock'a ait teorik fomülasyonların verdiği değerlerle karşılaştırılmıştır.

5. Yarımküre Şeklindeki Basınç Alanının Zorlayıcı Etkisi

Simülasyon için kullanılan yarımküre şeklindeki basınç alanı şu şekilde ifade edilmiştir:

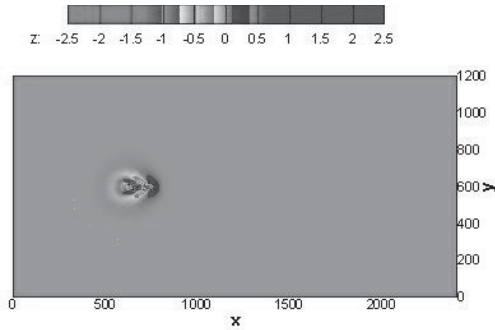
$$p(x, y) = p_0 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (8)$$

Burada, p_0 değeri basınç dağılımının en yüksek değeri olup, R ise yarıçaptır. Şekil 5, kullanılan basınç alanını göstermektedir.

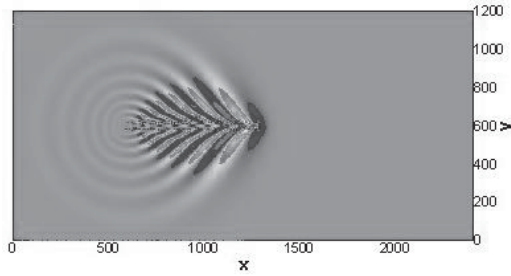


Şekil 2. Yarımküre şeklindeki basınç dağılımının üç boyutlu gösterimi

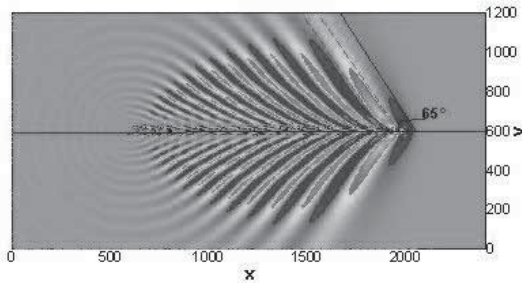
Simülasyonlarda, $R=40 \text{ m}$, $p_0 = 300 \text{ Pa}$, su derinliği $h = 10 \text{ m}$ alınmış olup buna bağlı hız $c = \sqrt{gh} = 10 \text{ m/s}$ 'dir. Simülasyon alanı, $2400 \text{ m} \times 1200 \text{ m}$ olup $\Delta x = \Delta y = 4 \text{ m}$ 'dir. Zaman aralığı ise $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ 'dir. x-momentum denkleminde $p_x = -xp_0/(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ ve y-momentum denkleminde $p_y = -yp_0/(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ şeklindedir. Şekil 6, derinlik Froude sayısı, $Fr = v/c = v/\sqrt{gh} = 1.1$ için sırasıyla $t = 10 \text{ s}$, 44 s ve 90 s 'de gözlenen dalgaların kontür grafiklerini göstermektedir. Bu Froude sayısına karşılık gelen basınç alanının ilerleme hızı ise $v = 1.1\sqrt{gh} = 1.1c = 11 \text{ m/s}$ 'dir. Tablo 1 ve Şekil 7'den görülen, $t = 90 \text{ s}$ için simülasyonu yapılan dalga alanının 65° olarak ölçülen ilerleme açısı, Havelock'un [4] teorik sonucuyla oldukça uyumludur.



(a) $t = 10 \text{ s}$, $Fr = 1.1$



(b) $t = 44$ s, $Fr = 1.1$



(c) $t = 90$ s, $Fr = 1.1$

Şekil 3. $Fr = 1.1$ için Boussinesq modeli ($\beta = 1/5$) kullanılarak ilerleyen bir yarımkürenin oluşturduğu dalgaların farklı zamanlardaki dalga konturları

Havelock [4] belli hızlarda ilerleyen bir yüzey basıncı nedeniyle oluşan dalga şekillerini, kritik altı ve kritik üstü Froude sayıları için incelemiştir.

Nokta şeklindeki bir impulsun sonlu derinlikteki bir suda ilerlerken oluşan giriş açısını Havelock şu şekilde ifade etmiştir:

$$Fr \leq 1 \text{ için } \alpha = \arccos \sqrt{8(1-n)/(3-n)}$$

$$Fr > 1 \text{ için } \alpha = \arcsin \sqrt{p}$$

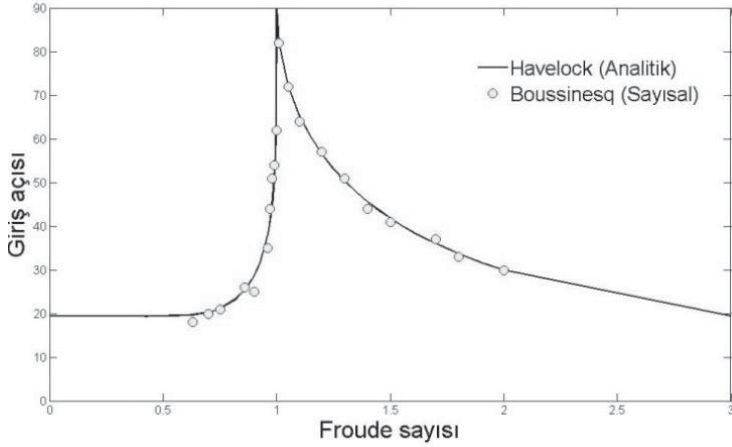
Burada, $p = gh/v^2 = c^2/v^2 = 1/Fr^2$ 'dir. $m = \frac{\tanh(kh)}{kh}$ ve $n = \frac{2kh}{\sinh(2kh)}$ iken, kritik altı

aralıktaki belirli bir Froude sayısı veya p değeri için öncelikle kh , $m(3-n) = 2/p$ bağıntısından iterasyonla bulunur. α değerini bulmak içinse, n değerinin sayısal değeri, hesaplanmış olan kh değeri kullanılarak bulunur. Kritik üstü aralıkta, p tek fonksiyon olup, başka bir hesaplama gerek yoktur. Tablo 1'de bunlara bağlı olarak hesaplanan kama açıları sayısal ve teorik olarak verilmiştir.

Tablo 1. Sayısal olarak elde edilen giriş açılarının Havelock'un analitik sonuçlarıyla farklı derinlik Froude sayıları için karşılaştırılması

Giriş açısı			
Fr	Boussinesq (Sayısal)	Havelock (Analitik)	Bağlı hata yüzdesi (%)
0.63	18.00	19.69	8.58
0.70	20.00	20.26	1.29
0.75	21.00	21.10	0.47
0.86	25.00	25.36	1.43
0.90	25.00	28.50	12.28
0.96	40.00	37.78	5.86
0.97	40.00	40.69	1.69
0.98	39.00	44.66	12.68
0.99	48.00	51.01	5.90
1.01	82.00	81.93	0.08
1.05	72.00	72.25	0.34
1.10	65.00	65.38	0.58
1.20	54.00	56.44	4.33
1.30	47.00	50.28	6.53
1.40	43.00	45.58	5.67
1.50	42.00	41.81	0.45
1.60	36.00	36.03	0.09
1.80	33.00	33.75	2.22
2.00	30.00	30.00	0.00

Kritik altı bölgede Froude sayısı sifira yaklaştıkça, bağlı derinliğin (kh) arttığı gözlemlenmektedir. Öte yandan, tüm kritik üstü aralıkta, kh değeri sifirin limit değeri olduğu durumu kabul eder ve giriş açısı hesaplamalarında etkisiz hale gelmektedir. Bundan ötürü, bir anlamda, düşük Froude sayıları, görece derin suları temsil ederken, yüksek Froude sayıları, sığ sulara karşılık gelmektedir. Şekil 7'de görüldüğü üzere, $Fr = 0$ durumunda, derin sular için, Kelvin'in çok iyi bilinen giriş açısı $\alpha = 19^{\circ}28'$ elde edilmiştir. Şekil 7'de, Havelock'un analitik formülleriyle hesaplanan giriş açılarıyla, Boussinesq modelini kullanarak elde edilen grafiklerden ölçülen giriş açıları verilmiştir. Buradaki Froude sayıları $\left(Fr = v / \sqrt{gh}\right)$ derinliğe bağlı olduğundan $Fr = 0$ durumu derin suya karşılık gelir, şöyle ki $v \neq 0$ şartıyla, su derinliği h teorik olarak sonsuzdur. Dolayısıyla Şekil 7'de $Fr < 1$ derin su bölgesini temsil ederken, $Fr > 1$ sığ su bölgesini temsil etmektedir. Boussinesq denklemleri genel olarak orta derinlikte ve sığ sulara uygulanabilir olduğundan, Tablo 1'de görüldüğü üzere, bu çalışmada simülasyonlar için, kritik altı aralık, $Fr=0.63$ ve $Fr=0.99$ arasında seçilmiştir.



Şekil 4. Sayısal olarak elde edilen giriş açılarıyla, Havelock'un teorik formülasyonunun karşılaştırılması

6. Sonuçlar

Boussinesq denklemleri genel olarak yakın kıyı bölgelerindeki ya da orta derinlikteki dalgaları modellemek için kullanılmaktadır. Bu uygulamaların dışında, ilerleyen bir cismin oluşturduğu dalgaları modellemek için de Boussinesq denklemleri kullanılabilir. Bu çalışmada, sabit ve ilerleyen yüzey basınçları kullanılarak sayısal dalga modellemeleri yapılmıştır.

Üç boyutlu simülasyonlar için Boussinesq denklemlerinde yarımküre şeklindeki bir basınç gradyanı kullanılmış ve ilerleyen bu basınç alanının oluşturduğu dalga şekillerinin farklı derinlik Froude sayıları için değişik zaman aralıklarında simülasyonları yapılmıştır. Havelock [4]'ün analitik sonuçları, hesaplanan giriş açılarıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar, özellikle bağıl derinliğin küçük olduğu, kritik üstü Froude bölgesi için çok iyi sonuçlar vermektedir. Kritik altı Froude bölgesinde ortalama hata % 5.58 iken, kritik üstü Froude bölgesinde ortalama hata % 2.03'e düşmektedir. Ortalama hata yüzdelerindeki bu fark, büyük ihtimalle Boussinesq denklemlerinin su derinliğine bağlı kısıtlayıcılığından ileri gelmektedir. Daha önce belirtildiği üzere, kritik altı bölge, görece daha derin suları temsil etmekte ve Froude sayısının sifıra eşit olduğu durum ise, tamamen derin suya karşılık gelmektedir. Sayısal modelin, kritik altı bölgede görece daha kötü sonuç vermesi, oluşan dalgaların derin su özelliklerine bağlanabilir.

7. Kaynaklar

- [1] Beji, S. and Nadaoka, K. A., Formal Derivation and Numerical Modelling of the Improved Boussinesq Equations for Varying Depth, *Ocean Engineering*, no. 23, pp. 691, 704, 1996.
- [2] Boussinesq, J.V., Theory of waves and surges which propagate the length of a horizontal

- rectangular canal, imparting to the fluid contained within the canal velocities that are sensibly the same from the top to the bottom, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, no. 17, pp. 55–108, 1872.
- [3] Engquist, B. and Majda, A., Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulations of Waves, *Mathematics of Computation*, no. 31(139), pp. 629-651, 1977.
- [4] Havelock, T., The propagation of Groups of Waves in Dispersive Media with Application to Waves on Water Produced by a Travelling Disturbance, *Proceedings of the Royal Society of London*, no.81(549), pp. 398–430, 1908.
- [5] Liu, P.L.F and Wu, T.R., Waves Generated by Moving Pressure Disturbances in Rectangular and Trapezoidal Channels, *Journal of Hydraulic Research*, no. 42, pp. 163-171, 2004.
- [6] Lynett, P., Wu, T.-R., and Liu, P. L.-F., Modeling Wave Runup with Depth-Integrated Equations, *Coastal Engineering*, no (46), pp. 89-107, 2002.
- [7] Madsen, P. A., Murray, R. and Sørensen, O. R., A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics, *Coastal Engineering*, no. 15, pp. 371-388, 1991.
- [8] Madsen, P. A. and Sørensen, O. R. , A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics part 2, *Coastal Engineering*, no. 18, pp. 183-204, 1992.
- [9] Mei, C.C. and LeMehaute, B., Note on the Equations of Long Waves Over an Uneven Bottom, *Journal of Geophysical Research*, no. 71, pp. 393-400, 1966.
- [10] Nwogu, O. , Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*. No. 119, pp. 618-638, 1993.
- [11] O'Brien, J.J. and Hurlburt, H.E., A Numerical Model of Coastal Up-Welling, *Journal of Physical Oceanography*, no. 2, pp. 14-26, 1972.
- [12] Peregrine, D. H., Long Waves On a Beach, *Journal of Fluid Mechanics*, no. 27, pp. 815-827, 1967.
- [13] Torsvik, T., Pedersen, G. and Dysthe, K., Waves Generated by a Pressure Disturbance Moving in a Channel with a Variable Cross- Sectional Topography, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, no. 135, pp. 120-123, 2009.