

Directional wave simulations by a new non-linear dispersive wave equation

新たな非線形分散性波動モデルによる平面波浪場解析

Directional - wave simulation by a new nonlinear-dispersive wave equation

Kazuo Nadaoka

Serdar Beji*・灘 岡 和 夫**

Kazuo Nadaoka

1. はじめに

最近、水の波の波動理論は新たな展開を見せつつある。中でも灘岡ら(1991, 1992, 1993a, b, 1994)は、多成分連成型の流速場表現に基づく新たな定式化により、従来のものとは大きく異なった非線形分散性波動方程式系を開発することに成功している。この方程式系は、任意の広帯域スペクトル場を扱える全く新しい方程式系であり、極浅海波から深海波にかけての広い範囲で、水表面波形だけでなく流速・圧力場に関してもかなり高い精度で記述することができる、という著しい特長を有している。

本研究は、この灘岡らの波動モデルに基づいて、その適用対象を平面波浪場へと拡張すべく、波動モデルの形式の部分的な改良や、効率的な数値解析法の開発を行うとともに、それらの妥当性を確認するために、既存の波動モデルによる計算結果や室内実験データとの比較を行うことを試みたものである。

2. 関連する波動モデルに対する本波動モデルの位置づけ

灘岡ら(1991, 1992, 1993a, b, 1994)の波動モデル(以下、「本モデル」と呼ぶ)は、従来の漸近展開法的な定式化に基づく Boussinesq-KdV タイプの波動方程式と異なり、多成分連成型の流速場表現に基づく全く新たな定式化によるものであるが、その後、本モデルのバリエーションと呼ぶべき方程式がいくつか提案されている(磯部, 1994a, b; 後野, 1993, 1994)。そこで、本論に入る前に、本波動モデルのポイントに関してあらためて論じることにより、本波動理論の位置づけを明確にしておくことにする。

本モデルの導出の出発点は、水の波に関する波動方程式の導出過程が、一般に、「流速場の鉛直依存性を仮定することにより、もとの3次元空間上で定義されている基礎方程式系から平面2次元空間上の方程式系に変換する

操作」と見ることができる、という点に着目したところにある(灘岡・中川, 1991, 1992, 1993a)。そのような見方が可能なことにひとたび気づけば、鉛直依存性の与え方として、Boussinesq タイプのような長波回りの漸近展開法的な表現形式に縛られる必要はなく、もっと目的にあった柔軟な与え方をすれば良いのではないかと、という発想が自然にでてくる。任意水深での広帯域上の強分散性波動方程式を導出するには、それに適した流速場の表現形式を導入すればよい。

要は、波動モデルの定式化の基本は、流速場の鉛直依存性の近似をどのようにするかということであって、本モデルの基礎となっている「多成分連成型の流速場表現」は、そのような本質的な要請から考えだされたものである。そして、この多成分連成型法とでも称すべき新たな理論的な枠組みを構築したことが、本波動モデルを生み出す最大のポイントになっている。

その意味で、同じ多成分連成型法に基づく磯部(1994a, b)のモデルは本モデルと実質的にほとんど同じもので、数学的な連成技法として本モデルで用いている Galerkin 法ではなく変分原理を用いている点が異なるだけである。(例えば、数学的連成手法として選点法を用いることも原理的に可能である。そうすると、バリエーションがもう一つ増えることになる。)

また、後野(1993, 1994)のものも、対象とする内部変量を流速ではなく圧力にとっていることに伴う見かけ上の違いはあるものの、基本的に本モデルと同じ多成分連成型法の枠組みでの定式化によるものである。

もっとも、それぞれのモデルの基本的な枠組みは同じでも、数式展開形式の違いは多少とも具体的なモデルの使い勝手(数値解析アルゴリズムなど)の違い等となって現れてくる。また、流速場の多成分連成近似として、具体的にどの様な鉛直依存性関数系を採用するか、という点も実際上かなり重要になる。この点に関して、本モデルでは双曲線関数系を用いているのに対し、磯部(1994a, b)はべき乗式系を、また後野(1993, 1994)はルジャンドル多項式系を用いている。

本モデルで双曲線関数系を採用している理由はきわめて簡単である。そうすれば、場合によっては(つまり狭

* Ph.D. イスタンブール工科大学准教授 造船・海洋工学科
** 正会員 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究所情報環境工学専攻

帯域スペクトル場ないしは規則波であれば), 多成分である必要はなく, わずか1成分で深海波から極浅海波にわたる任意の領域において, 波動場を十分精度良く表現することが可能になるからである。また, 広帯域スペクトル場であっても, 通常, 2ないし3の成分で十分であることが確認されている。ただし, 以上の議論は, 鉛直依存性関数として双曲線関数以外のものの使用を否定するものではない。局所的な水深急変部の表現など, 場合によっては, さらに適当な関数系をつけ加えることも考えられる。しかし, そのような作業は, 上記の多成分連成法の大きな枠組みの中での精度アップの議論にすぎない。

3. 本波動モデルによる平面波動場の数値計算

(1) 平面波動場解析のための波動モデル

灘岡らの波動方程式系にはさまざまなバージョンがあるが(例えば, 灘岡ら, 1994; Nadaoka ら, 1994, 1995), ここでは狭帯域スペクトル場を対象とした1成分型弱非線形方程式を用いることにする。ただし, これにもさらにいくつかのバージョンがあって, それらのベースとなる方程式系は,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \eta \right) \mathbf{u}_0 \right] = 0, \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} C_p C_g \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + C_p^2 \nabla \left[g \eta + \eta \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + w_0^2) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{C_p (C_p - C_g)}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \right. \\ \left. + \frac{\nabla \{ C_p^3 (C_p - C_g) \}}{k^2 C_p^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

である。ここで, C_p と C_g および k は, 対象とする狭帯域スペクトル場の設定中心角周波数 ω と水深 h から線形分散関係式で計算される位相速度, 群速度および波数である。また, η は水表面水位, \mathbf{u}_0 と w_0 は平均水位 $z=0$ での水平流速ベクトルおよび鉛直流速である。

この式(1), (2)から, 水表面水位 η のみを未知変数としたバージョンの波動方程式(灘岡ら, 1994; Nadaoka ら, 1994; Beji & Nadaoka 1995)として次式が得られている。

$$\begin{aligned} C_g \eta_{tt} - C_p^2 \nabla^2 \eta - \frac{(C_p - C_g)}{k^2} \nabla^2 \eta_{tt} - C_p \nabla (C_p C_g) \cdot \nabla \eta \\ - \frac{3}{2} g C_p \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) \nabla^2 (\eta^2) = 0 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

この式(3)を C_p で除すと, さらに次式が得られる。

$$\begin{aligned} n \eta_{tt} - C_p^2 \nabla^2 \eta - \frac{C_p^2 (1-n)}{\omega^2} \nabla^2 \eta_{tt} - \nabla (n C_p^2) \cdot \nabla \eta \\ - \frac{3}{2} g \left(3 - 2n - \frac{\omega^2 C_p^4}{g^2} \right) \nabla^2 (\eta^2) = 0 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに, $n = C_g/C_p$ である。上式によれば, 設定中心角周波数 ω が全計算領域で一定であることから, C_p^2 と n だけを各格子点上で記憶しておけばよいことになり, C_p と C_g , k の記憶を必要とする式(3)に比べて, 計算効率の上でかなり有利になる。特に, 平面波動場の場合, 計算負荷の軽減が重要となるため, このような記憶容量の削減はかなり重要なポイントになる。以下に示す数値計算結果は, すべてこの式(4)に基づいて行っている。

なお, 反射波が無視できる単一方向波浪場では, 式(3)をさらに簡単な式形に書き換えることができる。例えば, x の正方向へ伝播する波動場についての式形は以下のようになる(Nadaoka ら, 1994; Beji & Nadaoka, 1995)。

$$\begin{aligned} C_g \eta_t + \frac{1}{2} C_p (C_p + C_g) \eta_x \\ - \frac{(C_p - C_g)}{k^2} \eta_{xxt} - \frac{C_p (C_p - C_g)}{2k^2} \eta_{xxx} \\ + \frac{1}{2} [C_p (C_g)_x + (C_p - C_g)(C_p)_x] \eta \\ + \frac{3}{4} g \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) (\eta^2)_x = 0 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

数値計算上は, 当然ながら, こちらの形式の波動方程式の方がかなり簡単になる。なお, 上式からは, さらに弱分散浅海波近似によって KdV 方程式が導かれることが示されている。また, 逆の深海波近似によって導かれる方程式は, 対応する既存の波動方程式は存在しないものの, 2次の Stokes 波解をその解析解として含むことが示されている(Nadaoka ら, 1994; Beji & Nadaoka, 1995)。

(2) 球面浅瀬上の線形波動場に関する既存の波動モデルとの比較

本研究では, 典型的な平面波浪場として球面浅瀬上の規則波の変形を対象とし, 検討を行った。まず, 本波動モデルの基本的な妥当性を検証しておく目的で, 式(4)の線形化方程式による計算結果を, 既存の線形波動モデルによる Ito and Tanimoto (1972) や Flokstra & Berkhoff (1977), Radder (1979) らの解析結果と比較した。計算対象とした円形浅瀬の幾何形状は, 次式で与えられている(Radder, 1979)。

$$\left. \begin{aligned} h &= h_m + e_0 r^2 & \text{for } r < R, \\ h &= h_0 & \text{for } r \geq R, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに, $r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2$,

$$e_0 = (h_0 - h_m)/R^2,$$

で, 波の進行方向に x 座標をとっている。また, 上式中のパラメータとしては, 以下の値を与えている。

$$h_m/R = 0.0625, \quad h_0/R = 0.1875, \quad L_0/R = 0.5.$$

設定した格子サイズと時間ステップは, $\Delta x = L_0/10$, $\Delta y = L_0/4$, $\Delta t = T/10$ である(L_0 は, 周期 T に対応する深海波の波長)。これよりも高分解能のケースについても

計算を行っているが、本モデルでは、この程度の比較的荒い分解能でも十分な精度が得られることが確認されている。

図-1の上段の図は、本モデルによる水位分布の計算結果を鳥瞰図的に表したもので、下段の3つの図は、それぞれ、中心線($y=0$)上の無次元振幅の縦断分布、 $x/L_0=7$ および $x/L_0=6$ の地点での無次元振幅の横断分布を示している。このうち、無次元振幅分布に関しては、比較のため、Berkhoff (1972) の緩勾配方程式を用いた Flokstra & Berkhoff (1977) の計算結果も○印で示している。これと本モデルによる計算結果と比較すると、ほぼパーフェクトな一致が得られていることがわかる。

表-1は、計算結果をより詳細に見るために、最大振幅値 a_{\max} と最大振幅が現れている地点 x_{\max}/L_0 に関して、他のさまざまな研究者によるものと比較した結果である。これから、本モデルでは、最大振幅の値がやや大きくなっているものの、ほぼ一致する結果が得られていることがわかる。(なお、本モデルで上に示した値より細かな分解能で計算した結果では、最大振幅値が2.13とやや減少することが確認されているが、この程度の違いであれば、上記の分解能で実用上十分である。)

以上のように、本モデルによる線形平面波浪場の計算結果が既存の手法による計算結果とかなりよく一致することが示されたことから、本波動モデルが平面波浪場の計算手法として基本的な妥当性を有することが確認された。ここで、実用上重要となるポイントとして、所要計算時間について言及しておく必要がある。例えば、Berkhoff (1972) の緩勾配方程式を FEM で解いている Flokstra & Berkhoff (1977) に比べて、本モデルによる計算時間は非常に短くてすみ、平面波浪場の計算でありながら、パソコンでわずか2～3分しかかかっていない。

(3) 凸形地形斜面上の非線形波動場に関する室内実験結果との比較

つぎに、凸形地形斜面上の波浪変形について、非線形規則波に関する解析を行った。比較の対象としたのは、Whalin (1971) による室内実験結果である。この場合の地形の幾何形状は以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 = 0.4572 \quad \text{for } x < 10.67 - G(y), \\ h &= h_0 + (10.67 - G(y) - x)/25 \\ &\quad \text{for } 10.67 - G(y) \leq x \leq 18.29 - G(y), \\ h &= 0.1524 \quad \text{for } x > 18.29 - G(y), \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

ここに、 $G(y) = \sqrt{y(6.096 - y)}$ で、式中の数値は全て m 単位である。

計算は、表-2に示す3つのケースに関して行った(表中の L_m は平均波長、 W は水路幅)。同表には、各ケースの格子サイズと時間刻みの設定値も併せて示している。図-2～4に、それぞれ case 1, 2, 3 の計算結果を示す。

各図の上段は、水位分布を鳥瞰図表示したもので、下段は水路中央の x 軸上の無次元振幅分布を基本波成分と2次・3次の高調波成分に分けて表したものである。図中の記号は Whalin (1971) による実験値で、実線で示した本モデルによる計算値と比較すると、各ケースとも、斜面上での非線形波浪変形が、2次、3次の高調波成分も含めて良好に再現できていることがわかる。このことから、非線形平面波浪場についても、本波動モデルの適用性はかなり高いことが明らかとなった。

6. おわりに

本論文では、著者らが最近開発した新しい非線形分散性波動方程式系に基づいて、その適用範囲を平面波浪場に具体的に拡張すべく、球面浅瀬や凸形地形斜面上の平面波浪場での数値解析を行った結果について述べた。その際、数値計算上の効率を上げる目的で、波動モデルの数式表現上の若干の改良も行っている。

その結果、本モデルによる計算結果が、線形波動のケースで既存の波動モデルによる結果とよく一致したことや、非線形波動場のケースで室内実験データとの良好な一致を示せたこと、さらには本モデルでの所要計算時間がきわめて短いことなどから、平面波浪計算における本波動モデルの有効性が実証された。ただし、本論文では、計算ケースがまだ十分ではなく、他の非線形モデルによる計算結果との比較なども行っていない。これらについては、近々に別の機会を発表する予定である。

なお、本文中に述べたように、本論文では本波動モデルのうちの一成分バージョンのひとつだけを検討対象にしている。それ以外の、強非線形・強分散性(多成分型)

表-1 最大振幅値 a_{\max} と最大振幅地点 x_{\max}/L_0 に関する計算値の比較 (線形波動場)

	$a_{\max}(\text{m})$	x_{\max}/L_0
Radder (scheme I)	2.05	6.6
Radder (scheme II)	2.05	6.6
Ito & Tanimoto (1972)	2.10	6.3
Folkstra & Berkhoff (1977)	2.04	6.4
本モデル	2.15	6.3

表-2 各ケースの計算条件 (非線形波動場)

	T	a_0/h_0	Δx	Δy	Δt
case 1	1.0	0.0427	$L_m/25$	$W/10$	$T/25$
case 2	2.0	0.0164	$L_m/30$	$W/10$	$T/30$
case 3	3.0	0.0149	$L_m/35$	$W/10$	$T/35$

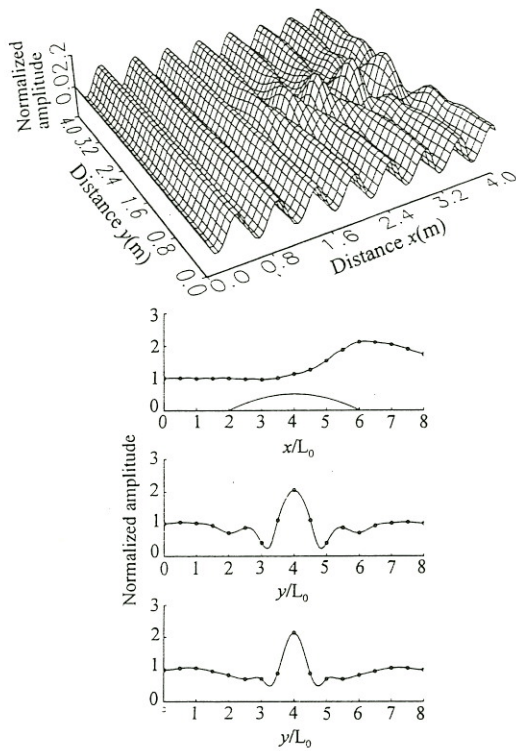
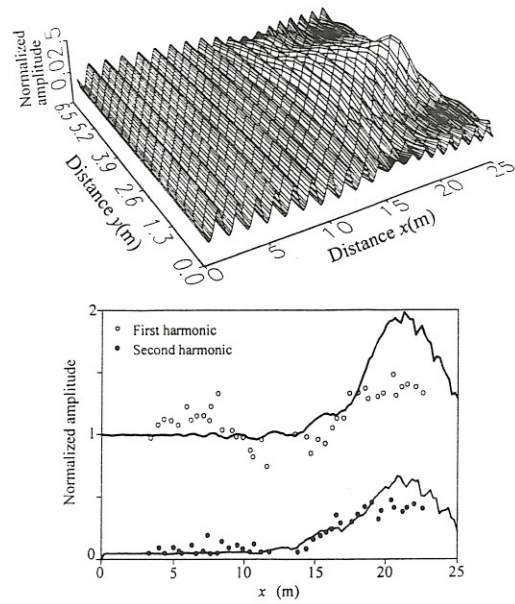
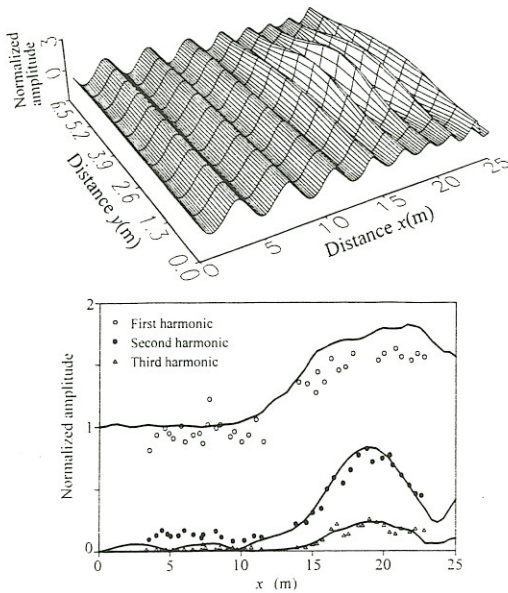
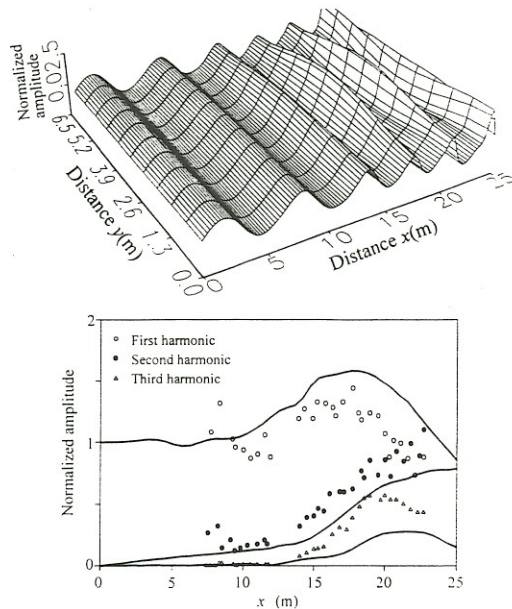


図-1 球面浅瀬上の線形波動場に関する計算結果

図-2 凸形地形斜面上の非線形波動場に関する計算結果：
case 1 ($T=1$ s)図-3 凸形地形斜面上の非線形波動場に関する計算結果：
case 2 ($T=2$ s)図-4 凸形地形斜面上の非線形波動場に関する計算結果：
case 3 ($T=3$ s)

バージョンを含むさまざまなバージョン（これらについては、例えば Nadaoka ら (1994) を参照されたい）に関する検討も、今後行っていきたいと考えている。

参考文献

- 磯部雅彦 (1994a): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 磯部雅彦 (1994b): 波浪解析のための波動方程式の比較研究, 土木学会論文集, No. 479/II-27, pp. 1-14.
- 灘岡和夫・中川康之 (1991): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 44, pp. 63-75.
- 灘岡和夫・中川康之 (1992): Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の基本特性に関する検討, 土木学会第 47 回年次学術講演会講演概要集 II, pp. 1024-1025.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993a): 不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 83-92.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993b): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6-10.
- 灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史 (1994): 新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と室内実験による検証, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 11-16.
- 灘岡和夫 (1995): 最近の非線形分散性波動理論の新展開, 1995 年度水工学に関する夏期研修会講義集, B コース, pp. B-3-1~B-3-21.
- 後野正雄 (1993): 緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 21-25.
- 後野正雄 (1994): 強非線形不規則波動場に対する連成振動方程式とその基本特性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 16-20.
- Beji, S. and Nadaoka, K. (1995): A time-dependent nonlinear mild-slope equation, Submitted to Proc. Roy. Soc. London A.
- Berkhoff, N. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.
- Folkstra, C. and Berkhoff, J. C. W. (1977): Propagation of short waves over a circular shoal, Delft Hydraulics Laboratory, Rep., W154-V (in Dutch).
- Ito, Y. and Tanimoto, K. (1972): A method of numerical analysis of wave propagation — Application to wave diffraction and refraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 503-522.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. (1994): A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical simulations, Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 1-15.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. (1995): A fully-dispersive weakly nonlinear wave model, Submitted to Proc. Roy. Soc. London A.
- Radder, A. C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, part 1, pp. 159-176.
- Whalin, R. W. (1971): The limit of applicability of linear wave refraction theory in a convergence zone, Res. Rep. H-71-3, U. S. Army Corps of Engrs, Waterway Expt. Station, Vicksburg, M. S.