

# Gemi Mühendisliğinde Ara Değerlere Analitik Yaklaşım

A. Cemil DİKİLİ (\*)  
Serdar BEJİ (\*)

## ÖZET

Gemi Mühendisliğine özgü eğrilerin matematiksel ifadesi için, çoğunlukla yararlanılan, polinomlar incelenmiştir. İki klasik yöntemde dephinerek, yeni önerilenle hesaplama açısından farklılıkları gösterilmiş, örnek bir uygulama olan Lagrange polinomları ile bilgisayar programı sunulmuştur.

## GİRİŞ

Gerçekte, oldukça somut sonuçlar getiren bir diğer çalışmaya(\*\*) yalnızca öncülük eden bu yazının içerik yönünden zenginliği tartışılabılır. Fakat, hazırlamasının nedeni; salt sözü edilen islevinin açıklanması değil, benzer türden uğraşilar için kolayca yararlanılacak matematiksel bir kaynak oluşturduğunun düşünlmesidir.

Ayrıca, sunulan yeni yaklaşımın yalnız, fakat; özgün olduğuna inanıyoruz.

## 1. EĞRİLERİN DEĞİŞİMİ

Mühendislik açısından, herhangi bir eğriye ait koordinatları belirli iki nokta arasında, eğri karakterini temelde iki özellik belirler :

- Noktalar arası uzaklık,
- Eğrinin fiziksel anlamı.

Gemi Mühendisliğinde söz konusu olan eğrilerin (Su hatları, güç ve stabilité eğrileri) düzgünlik koşullarını sağlayan formlara yakın oldukları, hatta olmaları gerektiği deneyimlerle belirlenmiştir. Orantılı artımlarla seçilen apsislere karşı gelen ordinatların fark tabloları, sonuçta; sabit değerlere gitme eğiliminde-

dir. Bu nedenle de polinom sınıfı eğriler, gemi mühendisliğinde gereken analitik yaklaşımlar için şimdilik en uygun grup olarak görülmektedir.

## 2. KLASİK YÖNTEMLER

### 2.1. N. Dereceden Bir Polinomun Katsayılarını, Köklerin Kombinezonları İle Hesaplamak,

Kökleri :  $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_i, \dots, -\theta_N$  olan N. dereceden bir polinom,  $P_N(x)$  ise :

$$P_N(x) = (x + \theta_1)(x + \theta_2) \dots (x + \theta_i) \dots (x + \theta_N)$$

veya

$$P_N(x) = x^N + A_1 x^{N-1} + A_2 x^{N-2} + \dots + A_{N-1} x^{N-i} + \dots + A_N$$

formunda yazılabilir. İkinci ifadedeki sabitler için :

$$\begin{aligned} A_0 &= f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \\ A_1 &= \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N \\ A_2 &= \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \dots + \theta_{N-1} \theta_N \\ A_3 &= \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \theta_1 \theta_2 \theta_4 + \dots + \theta_{N-2} \theta_{N-1} \theta_N \\ &\vdots &&\vdots \\ A_N &= \theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_N \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} , C_1^N &= N \\ , C_2^N &= N(N-1)/2 \\ , C_3^N &= N(N-1)(N-2)/3! \\ &\vdots &&\vdots \\ , C_N^N &= 1 \end{aligned}$$

olduğu matematikte gösterilmiştir.

Herhangi,  $A_i$  sabiti için :

(\*) Araştırma Görevlisi Müh. İ.T.U. Gemi İnşaatı ve Deniz Bil. Fak. Taşkısla/IST.

(\*\*) Gemilerde güç hesabı için yeni bir yaklaşık yöntem (Yayınlanacak).

- $C_i^N$  değeri : Toplanacak eleman sayısını,  
 $i$  değeri : Toplama giren herbir kombinezon grubundaki eleman sayısını vermektedir.

Yukarıda, alışlagelen biçim ile belirtildiği üzere, polinomun açınınındaki kat sayıları hesaplanabilir. Fakat bu amaca yönelik bir bilgisayar programında «N» değeri sınırının, programcı sabrına ve zamanına bağlı olduğunu belirtelim.

## 2.2. Lineer denklem takımlarının çözümü ile katsayıların hesabı :

Verilen :  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_N$  değerleri; N. dereceden :

$$P_N(x) = x^N + A_1 x^{N-1} + \dots + A_i x^{N-i} + \dots + A_N$$

gibi bir polinomun kökleri olsun. Böylece :

$$\begin{aligned} \theta_1^N + A_1 \theta_1^{N-1} + \dots + A_i \theta_1^{N-i} + \dots + A_N &= 0 \\ \theta_2^N + A_1 \theta_2^{N-1} + \dots + A_i \theta_2^{N-i} + \dots + A_N &= 0 \\ \vdots &\quad \vdots \\ \theta_N^N + A_1 \theta_N^{N-1} + \dots + A_i \theta_N^{N-i} + \dots + A_N &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan,

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{N-1} & \dots & \theta_1^{N-i} & \dots & 1 \\ \theta_2^{N-1} & \dots & \theta_2^{N-i} & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \theta_N^{N-1} & \dots & \theta_N^{N-i} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_1^N \\ -\theta_2^N \\ \vdots \\ -\theta_N^N \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Kısaca :

$$[\bar{\theta}] [A] = [\bar{\theta}]$$

veya :

$$[A] = [\bar{\theta}]^{-1} [\bar{\theta}]$$

Dikkat edilirse, ilkinde her kombinezonun ayrı ayrı ayrı hesaplanması, burada ise  $N \times N$  boyutunda lineer denklem takımının çözümü gerekmektedir.

Konuya bir parça ilgilenenler, yalnız yüksek değerlerdeki N sayıları için değil fakat  $N > 3$  olur olmaz; çözümde çeşitli sorunların çıktığını kabul edeceklerdir.

## 3. YENİ BİR YAKLAŞIM : Ardışık Bağıntılar

Çalışmamızda önerilen yeni yöntem bu bölümde açıklanmaktadır : Kökleri ledığını varsayalım :  $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_N$ . Bu polinomun katsayılarının,  $N=1$  'den başlayarak, kökler yardımcı ile  $N=2, 3, \dots, N$  değerleri için hesaplanması.

Verilen köklerin belirli bir sırayı izlediğini varsayalım :  $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_N$ . İlkini kök kabul eden polinom:  $P_1(x) = x + \theta_1$ , birinci ve ikinciyi kök kabul eden polinom :  $P_2(x) = x^2 + (\theta_1 + \theta_2)x + \theta_1 \theta_2$  ilk üç değer için

$$P_3(x) = x^3 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)x^2 + (\theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3)x + \theta_1 \theta_2 \theta_3 \text{ olursa}$$

$$P_1(x) = x + \theta_1 = x + A_1^1, A_1^1 = \theta_1$$

$$P_2(x) = x^2 + (\theta_1 + \theta_2)x + \theta_1 \theta_2 = x^2 + A_1^2 x + A_2^2, A_1^2 = \theta_1 + \theta_2 = A_1^1 + \theta_2 \text{ ve } A_2^2 = \theta_1 \theta_2 = A_1^1 \theta_2$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x^3 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)x^3 \\ &\quad + (\theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3)x + \theta_1 \theta_2 \theta_3 \\ &= x^3 + A_1^3 x^2 + A_2^3 x + A_3^3, \\ A_1^3 &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = A_1^2 + \theta_3, \\ A_2^3 &= \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_3 = A_1^2 \theta_3 + A_2^2 \text{ ve } \\ A_3 &= \theta_1 \theta_2 \theta_3 = A_2^2 \theta_3 \end{aligned}$$

yazılabilir ve gölüldüğü üzere N. dereceye ait terimler ( $N-1$ ). dereceye ait kat sayıları ve  $\theta_N$  yardımcı ile çıkarılmaktadır.

Bağıntıyı genelleştirelim :

$$A_1^1 = \theta_1 \dots N=1$$

$$A_1^2 = A_1^1 + \theta_2, A_2^2 = A_1^1 \theta_1 \dots N=2$$

$$A_1^3 = A_1^2 + \theta_3, A_2^3 = A_1^2 \theta_3 + A_2^2, A_3^3 = A_2^2 \theta_3 \dots N=3 \text{ ve } N=N \text{ için :}$$

$$A_1^N = A_1^{N-1} + \theta_N, A_2^N = A_1^{N-1} \theta_N + A_2^{N-1},$$

$$A_3^N = A_2^{N-1} \theta_N + A_3^{N-1},$$

$$\dots A_S^N = A_{S-1}^{N-1} \cdot \theta_N + A_S^{N-1},$$

$$\dots A_N^N = A_{N-1}^{N-1} \theta_N$$

Yukarıdaki, herhangi  $A_s^N$  katsayısı N. dereceden bir polinomun  $x^{N-s}$  mertebeli değişkenine aittir :

$$P_N(X) = X^N + A_1^N X^{N-1} + \dots + A_N^N X^{N-s} + \dots + A_N^N$$

Ekteki bilgisayar programı incelenirse böyle bir yol izlemenin üstünlükleri fark edilecektir.

Fakat bu kolaylıktan nasıl ve nerelerde yararlanabiliriz?

#### **4. ARA DEĞERLERE ANALİTİK YAKLAŞIM**

#### 4.1. Lagrange Polinomlari

Lagrange interpolasyon yöntemi, verilen  $N+1$  ayrık noktadan geçen  $N$ . dereceden polinomu belirler :

$$I_N(x) = \sum_{i=0}^N L_i(x) f(x_i) \quad (a)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{ve} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{b})$$

Herhangi ayrik noktanın koordinatları  $(x_i, Y_i)$  olsun. Genel bağıntıda kullanılan  $f(x_i) = Y_i$  şeklinde tanımlanmıştır.

(b) denklemi (a) da yerine konulup açılırsa, N. dereceden Lagrange interpolasyon polinomu :

$$I_N(x) = A_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_N)$$

$$\quad + A_1(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_N)$$

$$\quad + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_N)$$

⋮

$$\quad + A_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_N)$$

⋮

$$\quad + A_N(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-2})$$

$$\qquad \qquad \qquad (x - x_{N-1})$$

formunda olacaktır.

Yukarıdaki ifadeye ait katsayılar:  $A_0$ ,  $A_1, \dots, A_N$  ise  $P_N(x_i) = f(x_i)$ ,  $i=0, 1, \dots, N$  koşulu yardımı ile belirlenir.

$$A_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_N)}$$

⋮

$$A_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})}$$

$$\quad \quad \quad (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)$$

4.2. Lagrange Polinomları İçin Sayısal Örnek :

$N=3$  ayrık nokta için 2. dereceden Lagrange enterpolasyon polinomu,

Verilen ayrık nokta koordinatları :  
 $(-3,1)$ ,  $(2,7)$ ,  $(1,4)$

$i$	0	1	2	-
$x_i$	-3	2	1	
$y_i = f(x_i)$	1	7	4	

  

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i)$$

$$= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$= Y_0 L_0(x) + Y_1 L_1(x) + Y_2 L_2(x)$$
  

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(-3-2)(-3-1)} = \frac{1}{6} (x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(2+3)(2-1)} = \frac{1}{5} (x^2 + x - 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(1+3)(1-2)} = \frac{1}{4} (x^2 + x - 6)$$

Belirlenen terimler  $P(x)$  ifadesine yerles-  
tirilip düzenlenirse :

$$P(x) = \frac{9}{20} x^2 + \frac{33}{20} x + \frac{19}{10}$$

elde edilir.

Polinomun koordinatların üçünü de tam olarak sağladığı görülebilir.

### 4.3. Program

Üçüncü bölümde : «Ardışık Bağıntılar» başlığı ile açıklanan yeni hesaplama yöntemi uygulanmıştır. N. dereceden Lag-

range Interpolasyon polinomunun katsayılarını anılan yöntemle bulan HPL programı ilişiktedir.

## 5. SONUÇLAR

Düzgünliği saptanmış eğrilerin, matematiksel ifadesinden söz edilerek, uygunlamayı oldukça basitleştiren yeni bir yaklaşım açıklanmıştır. Lagrange polinomlarına ilişkin programın, klasik yöntemlerle kıyaslanması bunun en açık kanıdır. Özellikle yüksek mertebeden yaklaşımarda çalışmanın yararlı olacağı umit edilebilir.

**TEŞEKKÜR :** Sürekli teşvikleri ile cesaret veren Ar. Gör. Y. Müh. Ömer GÖREN'e teşekkürü borç biliyoruz.

## REFERANSLAR :

1. AKTAŞ Z., ÖNCÜL H. ve URALS., Sayısal çözümleme, Cilt I, Ankara, 1981.
2. CARNAHAN B., LUTHER H.A. and WILKES J.O., Applied Numerical Methods, 1969.
3. HILDEBRAND F.B., Introduction To Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Second Edition, New York, 1974.
4. PHILLIPS G.M. and TAYLOR P.J., Theory And Applications of Numerical Analysis, Akademik Press, New York, 1973.
5. RALSTON A., A First Course In Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
6. STIEFEL E.L., An Introduction To Numerical Mathematics, Academic Press, Fourth Printing, New York, 1969.
7. WENDROFF B., Theoretical Numerical Analysis, Academic Press INC. New York, 1967.

## EK :

- 0 : Dim A[6], X[6], Y[6], C[6], R[6, 6], T[20], S[6, 6, 20]; fixd 4
- 1 : ent M
- 2 : for I=1 to M
- 3 : ent X[I], Y[I]
- 4 : next I
- 5 : M-1→N
- 6 : for S=1 to M

```

7 : 0→Q; for I=1
     to N
8 : if S=I; X[S]→U
9 : if S=I; 1→Q
10 : -X[I+Q]→A[I]
11 : nex I; if
      S=M; X[M]→U
12 : for K=2 to
      N; for J=1 to K
13 : A[J]→S[K, 1,
      J]; next J; next
      K
14 : for K=2 to
      N; 1→S[K, K, 1]
15 : for J=1 to
      K; S[K, K, 1]*A[J]
      →S[K, K, 1]; next
      J; next K
16 : for K=3 to
      N; for I=2 to K-
      1
17 : 1→r1; for
      D=1 to K; r1*
      D→r1; next D
18 : 1→r2; for
      D=1 to I; r2*
      D→r2; next D
19 : 1→r3; for
      D=1 to K-I; r3*
      D→r3; next D
20 : r1/(r2*r3)→Z
21 : 1→r4; for
      D=1 to K-1; r4*
      D→r4; next D
22 : 1→r5; K-(I+
      1)→F; for D=1
      to F; r5*D→r5;
      next D
23 : r4/(r2*r5)→Y
24 : for J=1 to Z
25 : if J<=Y; S[K-
      1, I, J]→S[K, I, J]
26 : if J>Y; S[K-
      1, I-1, J-Y]*A[K]
      →S[K, I, J]
27 : J→T[I]; next
      J; next I; next K
28 : for I=1 to
      N; 0→C[I]
29 : for J=1 to

```

```

T[I]; C[I]+S[N,
I, J]→C[I]; next
J; next I
30 : S[N, N, 1]→C[N
]
31 : 0→C[1]; for
I=1 to N; C[1]+
S[N, 1, I]→C[1];
next I
32 : U↑N+C[N]→P
33 : for I=1 to
N-1
34 : P+C[I]*U↑(N-
I)→P
35 : next I
36 : for I=1 to
N; C[I]/P*Y[S]→R
[S, I+1]
37 : next I
38 : 1/P*Y[S]→R[S
, 1]
39 : next S
40 : for I=1 to M
41 : 0→C[I]
42 : for J=1 to M
43 : C[I]+R[J,
I]→C[I]
44 : next J
45 : next I
46 : prt "M=", M

```

```

47 : for I=1 to M
48 : prt X[I],
Y[I]
49 : next I
50 : for I=1 to
M; prt "C", C[I];
next I
51 : "ek": ent Y
52 : C[1]*Y↑N+
C[M]→V
53 : for I=2 to N
54 : V+C[I]*Y↑(M-
I)→V; next I
55 : dsp "Y=", Y;
wait 4000
56 : dsp "V=", V;
wait 4000
57 : gto "ek"

```

Hewlett Packard language (HPL) dili ile  
Hewlett Packard (HP9825) bilgisayarı  
için yazılmıştır.

Yukarıdaki programın sonuçları yapılan  
örnek için aşağıda verildiği gibi elde  
edilmiştir.

"c"	0.45
"c"	1.65
"c"	1.90