

Development of a fully-dispersive nonlinear wave model and its experimental verification
新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と

室内実験による検証

Development of a fully-dispersive nonlinear wave model
and its experimental verification

灘岡 和夫*・Serdar Beji**・大野 修史***

Kazuo Nadaoka

Osafumi Ono

Kazuo Nadaoka

Osafumi Ono

1. はじめに

総じて狭帯域スペクトル波動場を前提とした弱分散性（ここでは狭帯域の意）波動方程式となっている既存の波動方程式は、任意のスペクトル帯域を有する実際の海洋波浪の力学過程を一般的に記述する上で限界がある。これに対して最近、灘岡・中川（1991, 1993a, 1993b）は、このような一般的な波動場に適用可能な新たな強分散性（広帯域）波動方程式を導出することに成功している。

しかしながら、そこで最初に解析対象とされた強分散性波動場は線形波動場であって（灘岡・中川 1991, 1993a）、非線形波動場に関しては弱分散性波動場の解析に限られていた（灘岡・中川, 1993b）。それは、一つには強分散性非線形波動場を数値解析する際に必要となるアルゴリズムの開発が大きなネックになっていたためである。

そこで本研究では、その後、一般化 Thomas 法をベースとして開発した効率的なアルゴリズムについて述べ、それにより計算速度が大幅に短縮されるとともに、実際の解析対象範囲を任意の強分散性非線形波動場に拡張することに成功したことについて報告する。そして、本波動モデルの妥当性や有用性を実証するために行った室内実験の内容について述べるとともに、理論的な面からの検討により、本波動方程式が、Boussinesq 方程式や緩勾配方程式など既存のさまざまな波動方程式をその特別な場合として含むことを示す。

2. 灘岡・中川の波動方程式の導出過程の要点

灘岡・中川（1991, 1993a, 1993b）の波動方程式は、「流速場を適当な鉛直依存性関数を含む N 項の成分和で表し、それらの重み関数を連成させる形で任意の波動場での流速場をなるべくうまく近似する」という基本思想のもとで導かれたもので、以下の 3 ステップからなる。

ステップ 1：流速場の鉛直依存性に関する仮定の導入。

ここに

$$F_m(z) = \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m h} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で、 x ：水平座標 (x, y)、 z ：鉛直座標（静止水面から上向きに正）、 t ：時間、 h ：水深、 u, w ：水平流速ベクトル (u, v) および鉛直方向流速、である。

↓

ステップ 2：基礎方程式への代入。

↓

ステップ 3：Galerkin 法による $u_m(x, t)$ と自由表面 $\eta(x, t)$ の連成時間発展方程式の導出。

3. 波動理論および数値解析法の再展開

(1) 灘岡・中川の波動方程式の数値解析上の問題点

灘岡・中川（1993b）は、上記の定式化によって、任意の N （したがって強分散性）の場合で、かつ非線形性を full に考慮した波動方程式を導出している。しかし、それを実際に数値的に解く上で以下の問題が生じていた。

① 得られた波動方程式が、その係数に双曲線関数を数多く含み、しかも係数中に（波動方程式が full nonlinear であることに対応して）未知変数 η が入る形になっており、また非線形項に三重和まで取る項が現れることから、それらが計算時間を長くする要因になっている。

② 方程式を差分表現したときの行列が、 $N=1$ の場合には Boussinesq 方程式の場合と同様に三重対角行列となり、通常の効率的なアルゴリズムを用いて解くことができるのに対し、 N が 1 より大きい場合、ブロック三重対角行列になるため、アルゴリズム上取り扱いがかなり難しくなる。実際、SOR のような反復法は線形波動場では安定な解を与えることができたものの、非線形波動場では合理的な解を与えることができず、そのことが、これまでの解析対象を $N=1$ の場合すなわち弱分散性非線形波動場に限る原因になっていた。

(2) 波動理論展開の若干の変更

ここでは、まず上記の①の問題点を解消するため、波

* 正会員 工博 東京工業大学教授 大学院情報理工学研究所情報環境学専攻

** Ph.D. イスタンブール工科大学準教授 海洋工学科

*** 学生会員 東京工業大学大学院修士課程

動方程式の導出過程そのものを少し見直すことを試みる。見直しの対象としたのは、先のステップ2における基礎方程式の表現形式と、ステップ3における Galerkin 法の適用の仕方に関する部分である。

定式化の出発点となる基礎方程式は、やはり連続式と Euler の方程式とするが、ここでは、これらを以下のように扱いやすい形に変形しておく。

まず、連続式に関しては、その水深積分形

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

において、水平流速 \mathbf{u} を $z=0$ の回りで Taylor 展開して、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz + \eta \mathbf{u}_0 \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表す。ここに、 \mathbf{u}_0 は $z=0$ での \mathbf{u} であり、 ∇ は水平勾配演算子 ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$) を表している。

一方、Euler の方程式は、場の非回転性の仮定を導入することにより、さらに以下のように表せる (Beji, 1994)。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left[g\eta + \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s + w_s^2) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 \mathbf{u}_s および w_s は、水平流速ベクトル \mathbf{u} と鉛直流速 w の自由表面 $z=\eta$ での値である。 \mathbf{u} と w に関して先と同様に $z=0$ の回りで Taylor 展開を導入すると、上式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left[g\eta + \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + w_0^2) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで重要な点は、式 (4) や (5) で、非線形項が自由表面 $z=\eta$ あるいは平均水位 $z=0$ での流速値だけで表されていることである。このことが、先の①で述べた、最終的に得られる波動方程式において三重和が現れる問題を解消することにつながる。

つぎに、式 (3) と (5) に、 \mathbf{u} の鉛直依存性を表す式 (1) を代入し、やはり Galerkin 法を用いて展開する。その際、式 (3) や (5) で $z=0$ 回りの Taylor 展開を導入したことに対応して、 z 方向の積分範囲を $-h$ から η までではなく、 $-h$ から 0 までにとる。そうすると、最終的に以下の波動方程式系が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_m^2}{g} + \eta \right) \mathbf{u}_m \right] = 0, \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} + B_n \nabla \left[g\eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + w_0^2) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^N [C_{nm} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_m) + D_{nm} (\nabla \cdot \mathbf{u}_m)], \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{m=1}^N \mathbf{u}_m, \quad w_0 = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left(\frac{B_m}{g} \mathbf{u}_m \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{k_n^2 - k_m^2}, \quad A_{nn} = \frac{g\omega_n^2 + h(g^2 k_n^2 - \omega_n^4)}{2gk_n^2} \\ B_n &= \omega_n^2 / k_n^2, \quad C_{nm} = (B_n - A_{nm}) / k_m^2 \\ D_{nm} &= \nabla C_{nm}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$\omega_m^2 = gk_m \cdot \tanh k_m h \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。

これらの方程式系を見ると、灘岡・中川 (1993 b) の N 成分非線形波動方程式に関して、さきの①で述べた三つの問題点はすべて解消していることがわかる。すなわち、式 (7) では三重の Σ 記号は現れておらず、式 (9) の諸係数には双曲線関数を用いた表現がすべて無くなり (z 方向の積分範囲を変更したことによって) 未知数 η も含まれていない。全体的にかなり簡潔な形になっている。(もちろん、諸係数に η が入ることをいとわなければ、式 (2)、(4) をベースに理論展開すればよい。)

(3) 強分散性 (N 成分) 非線形波動場を対象とした効率的な数値解法の開発

つぎに、 N 成分非線形波動方程式の数値解析法に関する問題点②の解決法について述べる。この問題は、本波動方程式に限らず、方程式を差分表現したときの行列が通常の三重対角ではなくブロック三重対角になる場合の数値解法として一般性のある課題である。これに関して、これまでは、SOR や行列式を近似的に三重対角化する方法を用いていたが、 N 成分非線形波動場の計算に対しては良好な結果が得られなかった。

その後、ブロック三重対角の解法として非常に有効な一般化 Thomas 法 (Keller, 1974) と呼ばれる手法があることを知り、それに基づいた数値解法を再構成した。詳細は省くが、このアルゴリズムの改良と、上記の方程式そのものの簡素化によって、任意の N の場合の解析も効率的に安定して行える数値解析法を確立した。これによって、任意の強分散性非線形波動場の解析が可能となるとともに、計算時間を大幅に短縮することができた。(通常の一次元計算であればパソコンでわずか 2~3 分。)

4. 室内検証実験

本波動モデルの妥当性・有効性を実証するために、図-1 に示すような台形浅瀬模型上を通過する波列の実験を行った。この場合、浅瀬上で非線形性が強くなるとともに、浅瀬通過後の水深増加領域における波の分裂によって分散性が強く現れるため、強分散性非線形波動場の検証に適した実験が可能となる。実験は、表面波形だけでなく流速波形も LDV によって図中の 7 断面で測定した。

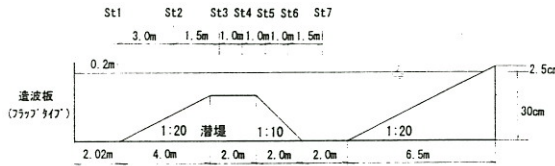


図-1 実験装置の概要

図-2 は、入射波高 2.0 cm、周期 $T=1.5$ 秒の規則波を入射したときの表面波形 η の時空間的な変化に関して、station1 での実測波形を境界条件として本波動方程式 (6)、(7) により計算した結果を実験値と比較したものである。計算は、 $N=2$ とし、2 成分の設定周波数をそれぞれ $\omega_1=T$ 、 $\omega_2=2T$ として行った。同図を見ると、station2~7 の各点において計算値は実測値と良好な一致を示していることがわかる。

図-3 は、比較のために、Madsen et al. (1991) の改良 Boussinesq 方程式による解析結果を実験結果とともに示したもののだが、本モデルに比べて station7 あたりでの実験値との一致度がやや悪くなっている。

つぎに、流速波形に関する解析結果を実験結果と比較した結果を図-4 に示す。ここでは、高周波成分が相対的に最も大きくなる station7 (水深 30 cm) について、3 つの z 位置での u と w について比較した結果を示している。これから、表面波形だけでなく流速波形についても各 z でかなり良好な一致が得られていることがわかる。

一方、図-5 は、やはり比較のために、Madsen et al. (1991) の改良 Boussinesq 方程式による解析結果を実験結果とともに示したもののだが、特に上層での流速波形が実験値と大きく異なっており、かなり過大な値を与えていることがわかる。このように、改良 Boussinesq 方程式は、表面波形については、この実験条件では本モデルに比べて多少一致度が悪くなる程度だが、流速場の計算精度についてはかなり悪くなる。

なおここでは紙面の都合上示していないが、非線形不規則波浪場についても解析を行っており、実験値との良好な一致が得られている。

5. 既存の波動方程式との関係

冒頭に述べたように、既存の波動方程式は総じて弱分散 (ないしは非分散) 性波動方程式となっている。ここでは、本波動方程式と既存の波動方程式の関係を見えるために、1 成分 ($N=1$) の場合について本波動方程式を書き表してみる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p}{g} + \eta \right) \mathbf{u}_0 \right] = 0, \quad \dots \quad (11)$$

$$C_p C_g \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + C_p^2 \nabla \cdot \left[g \nabla \eta + \eta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + w_0^2) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + \frac{\nabla \{ C_p^3 (C_p - C_g) \}}{k^2 C_p^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \right] \quad \dots \quad (12)$$

ここで、 k 、 C_p 、 C_g は 1 成分の設定周波数 ω に対応する波数、位相速度、群速度である。既報で何度か述べているように、本波動方程式は、このような 1 成分の場合でも、 ω (あるいは k) の周辺で分散関係を精度よく表現できる。したがって、この式 (11)、(12) は、 ω にスペクトルピークをもつ狭帯域スペクトル波動場に対して有効な、弱分散性波動方程式となっている。

ここでは、この式 (11)、(12) に基づいて、既存の代表的な弱分散性波動方程式との関係を見てみることにする。

(1) Boussinesq 方程式との関係

分散関係式を $kh=0$ の回りで Taylor 展開して

$$C_p = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right), \quad C_g = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{2} \right) \quad \dots \quad (13)$$

と表し、これらを式 (11)、(12) に代入すると、最終的に、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \mathbf{u}_0] + \frac{h^3}{3} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) = 0 \quad \dots \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(g \nabla \eta + \frac{1}{2} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \right) = \frac{k^2 h^2}{3} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + g \nabla \eta \right) \quad \dots \quad (15)$$

が得られる。ただし、簡単のため、ここでは一定水深の場合を扱っている。これは、Peregrine (1967) の $z=0$ での流速 \mathbf{u}_0 を用いて表した Boussinesq 方程式に他ならない。

(2) 緩勾配方程式との関係

有名な Berkhoff (1972) の緩勾配方程式やその後いくつか提案されているその双曲型表現式は非分散性方程式であるが、最近、設定中心周波数 ω の回りの狭帯域で分散性を表現することができる緩勾配方程式を求める試みがいくつかなされている (窪ら, 1991; Kirby et al., 1992)。しかし最初の試みは意外に古く、Smith & Sprinks (1975) によって、弱分散性 (あるいは狭帯域) 緩勾配方程式と呼ぶべき、次式が既に提案されている。

$$\eta_{tt} + \omega^2 \left(\frac{C_p - C_g}{C_p} \right) \eta - \nabla \cdot (C_p C_g \nabla \eta) = 0 \quad \dots \quad (16)$$

この波動方程式は、式 (11)、(12) を組み合わせて、 η のみの変数による方程式に書き換え、緩勾配近似を導入することによって得られる、

$$\begin{aligned} & -C_g \eta_{tt} + C_p^3 \nabla^2 \eta + \frac{(C_p - C_g)}{k^2} \nabla^2 \eta_{tt} \\ & + C_p \nabla \cdot (C_p C_g \nabla \eta) \\ & + \frac{3}{2} g C_p \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k^2 C_p^4}{g^2} \right) \nabla^2 (\eta^2) = 0 \quad \dots \quad (17) \end{aligned}$$

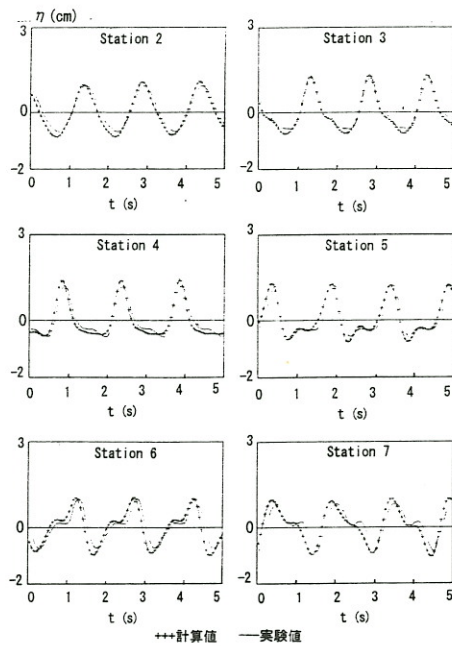


図-2 表面波形 η に関する本波動モデルによる計算値と実験値の比較 (station 2~7)

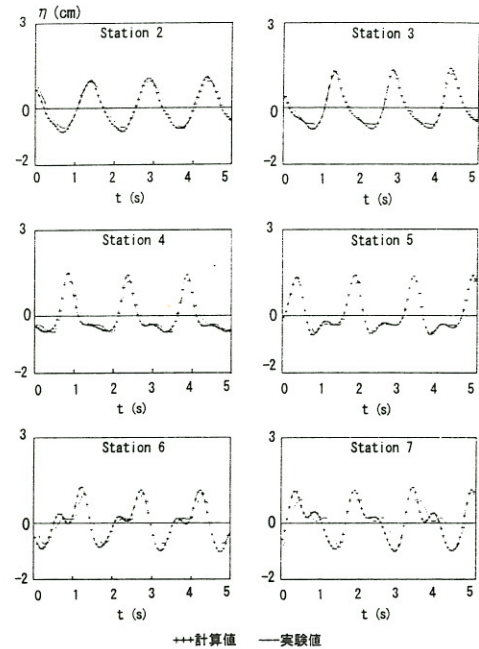


図-3 表面波形 η に関する改良 Boussinesq 方程式による計算値と実験値の比較 (station 2~7)

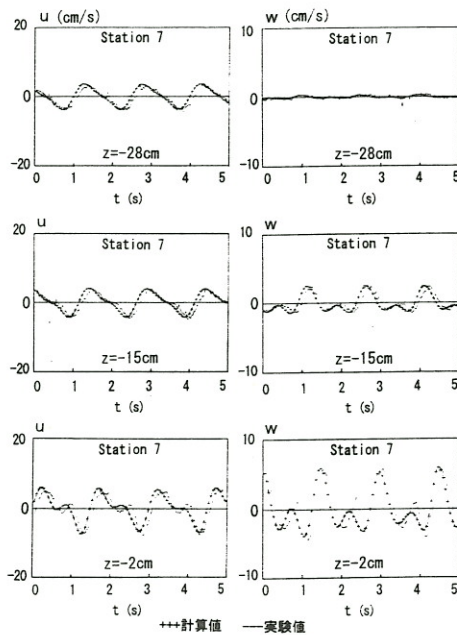


図-4 水平・鉛直流速 u, w に関する本波動モデルによる計算値と実験値の比較 (station 7)

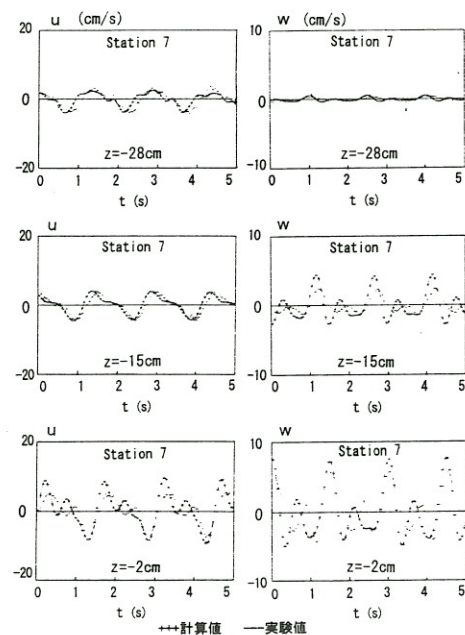


図-5 水平・鉛直流速 u, w に関する改良 Boussinesq 方程式による計算値と実験値の比較 (station 7)

から、非線形項を省略し、若干の式変形を行うことによって得ることができる。さらに定常波動場を仮定すれば、Berkhoff (1972) の式も導ける。これらのことから、式 (17) は、一種の「非線形緩勾配方程式」と見ることがで

きる。ただし、その線形分散特性は、Smith & Sprinks (1975) や Kirby et al. (1992) ら、あるいは窪ら (1991) の緩勾配方程式に比べて理論的な分散関係式をより合理的に近似する形になっており、その意味で式 (17) は、

それを線形化した形においても、これらの緩勾配方程式に比べて優れた面を持っている。

その他、ここでは示さないが、非線形長波方程式なども本理論から導ける。このように、本波動モデルは、既存のさまざまな波動方程式をそのいくつかの特別な場合として含むきわめて一般性のある波動理論となっている。

6. おわりに

今回の研究によって、方程式表現の簡潔化、効率の良い数値計算アルゴリズムの開発、既存の波動方程式をいくつかの特殊な場合として含むことの理論的な確認、などがなされ、新しい非線形強分散性波動モデルの開発とその実用化に向けてのわれわれの一連の研究が一段落ついたように思う。

このように既存波動理論の弱分散性（狭帯域性）の壁を打ち破って、これまでに無い強分散性波動方程式の開発に結びつけることができた最も重要なポイントは、2. で示した、方程式展開の最初のステップである流速場の鉛直依存性の仮定（式（1））および式中の重み関数 u_m の決め方の基本的な思想にある。

灘岡・中川（1991, 1993a）でも述べているように、一般に水の波に関する波動方程式の導出過程は、流速場の鉛直依存性を仮定することにより、もとの3次元空間上で定義されている基礎方程式系から平面2次元空間上の方程式系に変換する操作と見ることができる。例えば、Boussinesq 方程式の導出では、鉛直依存性関数として n 次多項式系に設定し、それらにかかる重み関数が漸近展開法的手法により決められる。これに対して、本波動理論では、それとは根本的に異なった発想、すなわち重み関数 u_m を連成させる形で流速場をなるべくうまく近似するという考え方を持込んでいる。具体的に u_m を連成させる方法としてここでは Galerkin 法をベースにしているが、実際に重要なポイントとなったのは、任意の流速場をごくわずかの項数（ $N=2\sim 4$ ）の u_m でかなり良く近似できることが見いだされたことである（灘岡・中川, 1991, 1993a）。念のため付け加えると、本質的に重要なのは u_m を連成させて流速場を近似するということがあって、Galerkin 法の使用ということが本質的なのではない。もし、連成手法として他にも有効な技法があれば、

それを使うというバリエーションも考えられる。実際、磯部（1994）は最近、Lagrangian を導入した変分原理（例えば、Kirby et al., 1992）を用いて類似の連成方程式を得ている。

なお、紙面スペースの関係上、ここでは数式展開や数値計算法、実験の詳細についての記述を割愛せざるを得なかった。それぞれの詳しい内容については、別の機会に近々に発表する予定である。

謝辞：本研究を行うに当たっては、文部省科学研究費一般研究 C（研究課題番号：0265034，研究代表者：灘岡和夫）の補助を受けた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 磯部雅彦（1994）：私信。
- 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺晃（1991）：非定常緩勾配不規則波動方程式について，海岸工学論文集，第 38 巻，pp. 46-47.
- 灘岡和夫・中川康之（1991）：Galerkin 法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について，東京工業大学土木工学科研究報告，No. 44，pp. 63-75.
- 灘岡和夫・中川康之（1993a）：不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討，土木学会論文集，No. 467/II-23，pp. 83-92.
- 灘岡和夫・中川康之（1993b）：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み，海岸工学論文集，第 40 巻，pp. 6-10.
- Beji, S. (1994): Depth-integrated conservation equations for nonlinear surface waves, submitted for publication.
- Berkhoff, N. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.
- Keller, H. B. (1974): Accurate difference methods for two-point boundary-value problems, SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 11, No. 305.
- Kirby, J. T., C. Lee and C. Rasmussen (1992): Time-dependent solutions of the mild-slope wave equation, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp. 391-404.
- Madsen, P. A., R. Murray and O. R. Sørensen (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 371-388.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 815-827.
- Smith, R. and T. Sprinks (1975): Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol. 72, part 2, pp. 373-384.