SIĞ VE DERİN SULARDA GEÇERLİ KADOMTSEV-PETVIASHVILI DENKLEMİ VE UYGULAMALARI

S. Beji, Prof. Dr., İstanbul Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Maslak 34469, İstanbul.
Tel: (212) 285 6442, Faks: (212) 2856454, E-posta: sbeji@itu.edu.tr

Özet
Göreceli sığ ve derin sularda geçerli olan ve değişken batimetriler için kullanılabilen yeni bir Kadomtsev-Petviashvili tipi dalga denklemi ve uygulamaları göz önüne alınmaktadır. Yeni türetilen KP tip dalga modeli sığ sularda cnoidal dalgaları ve derin sularda ikinci mertebe Stokes dalgalarını modelleyebilmektedir. Ayrıca, bütün göreceli derinlikler için sinüsoidal dalgaların değişen su derinliklerinde sığlaşması enerji akısı ilkesiyle tamamen uyumlu olarak modellenebilmektedir.

Kadomtsev-Petviashvili Equation Valid for Shallow and Deep Waters and Its Applications

A new Kadomtsev-Petviashvili-type equation valid for shallow and deep waters with variable bathymetry is presented with applications. Newly derived KP-type wave model is capable of modeling cnoidal waves in shallow waters and second-order Stokes waves in deep waters. Further, for all relative depths shoaling of sinusoidal waves over varying bathmetry is modeled in perfect agreement with the energy flux concept.

Anahtar Kelimeler: Kadomtsev-Petviashvili tipi dalga denklemi, cnoidal dalgalar, Stokes dalgaları, değişken batimetriler.

Giriş
Kadomtsev-Petviashvili dalga denklemi ya da kısaca KP denklemi ilk kez 1970 yılında tek (solitary) dalgaların stabilitesini incelemek üzere türetilmiştir (Kadomtsev ve Petviashvili, 1970). O zamandan bu yana daha çok akademik amaçlı incelemelerde kullanılan denklem temelde Korteweg & de Vries (1895) denkleminin (KdV) `zayıfça yönlenmiş' hali olarak bilinmektedir. KdV denklemi ise bir boyutlu Boussinesq (1872) denkleminin yalnızca tek yönde ilerleyen dalgaları modelleyen halidir. Böylece `zayıfça yönlenmiş' ile kastedilen, tek yönde ilerleyen bu dalgaların yatayda belli açılarla da ilerlemelerine kısmen olanak sağlandığıdır. Matematiksel olarak ise, ana ilerleme doğrultusuna dik eksen yönünde ilerlemeye olanak verecek bir terimin denklemde yer almasıdır.
KP denkleminin göreceli olarak akademik çalışmalarda kullanılması uygulamalar açısından bazı temel eksiklikleri olmasından kaynaklanmaktadır. Özellikle kıyı mühendisliği uygulamalarında kullanılabilecek olan bu denklemin, öncelikle kıyı bölgesinde su derinliklerinin değişimine bağlı sığlaşma etkisini doğru olarak modellemesi beklenir. Bunun yanı sıra, yalnızca sığ bölgelerle sınırlı olmayan ve daha derin sularda da geçerli olan bir model

yine uygulamalar açısından tercih edilir. Literatürdeki KP tip denklemlerin bu iki önemli özelliği taşımamaları bu denklemlerin uygulamada kullanımlarını engellemektedir.
Bu çalışmada, klasik KP denkleminin eksikliklerini tamamen gideren yeni bir KP denklemi önerilmektedir. Yeni KP denklemi klasik denklemle temelde aynı formda olup, dispersiyon ve sığlaşma özelliklerini bütün göreceli derinliklerde geçerli yapan ilave terimler içermektedir. Böylece yeni denklem bütün göreceli derinliklerde geçerli olan, sığlaşma etkisini enerji akısı ilkesine uygun olarak modelleyen bir denklem olmaktadır. Öte yandan, klasik KP denklemi gibi sığ sularda cnoidal dalgaları modellerken, derin sularda da ikinci mertebe Stokes dalgalarını modelleyebilmektedir. Bütün bu özellikleriyle yeni KP denkleminin kıyı mühendisliği uygulamalarında da kullanılması mümkün görülmektedir.

Yöntem
Nadaoka, Beji ve Nakagawa (1997) geniş bantlı dalga spektrumuna sahip karışık lineer olmayan dalgaları modelleyebilen bir dalga modeli türetti. Bu dalga modelinin dar bantlı karışık dalgaları modelleme özelliği olan bir bileşenli hali,

$$\zeta_t + \nabla \cdot \left[\left(C_p^2/g + \zeta\right)\boldsymbol{u}_0\right] = 0 \tag{1}$$

$$C_p C_g \boldsymbol{u}_{0t} + C_p^2 \nabla\left[g\zeta + \zeta w_{0t} + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 + w_0^2)\right] = \nabla\left[\frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_{0t})\right] \tag{2}$$

olarak verilmektedir. Yukarıdaki denklemlerde, ζ serbest su yüzeyi dalgalanmasını, $\boldsymbol{u}_0$ sakin su hattında $z = 0$, x ve y doğrultusundaki bileşenleri (u_0, v_0) olan yatay hız vektörünü, w_0 yine $z = 0$'da dikey hız bileşenini, C_p, C_g ve k verilen bir ana frekans değeri ω ve yerel su derinliği $h = h(x, y)$ için lineer dispersiyon bağıntısına $\omega^2 = gk \tanh kh$ göre hesaplanan faz hızı, grup hızı ve dalga sayısı değerlerini temsil etmektedir. g yerçekimi ivmesi olup, ∇ bileşenleri $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ olan iki boyutlu yatay türev operatörünü, t ise zamana göre kısmi türevi göstermektedir.
Beji ve Nadaoka (1997)'da ayrıntılı olarak verildiği üzere (1) ve (2) denklemleri uygun yaklaşımlarla yalnızca ζ cinsiden tek bir denklem olarak birleştirilebilir:

$$\zeta_{tt} - \frac{C_p^2}{r}\nabla^2\zeta - \frac{C_p^2(1-r)}{r\omega^2}\nabla^2\zeta_{tt} - \frac{3g}{2r}\left(3 - 2r - \frac{\omega^2 C_p^2}{g^2}\right)\nabla^2(\zeta^2)$$
$$= \nabla\left(\frac{C_p^2}{r}\right) \cdot \nabla\zeta + \frac{1}{\omega^2}\left[\nabla\left((1-r)\frac{C_p^2}{r}\right) - \frac{C_p^2}{r}\nabla r\right] \cdot \nabla\zeta_{tt} \tag{3}$$

burada $r = C_p/C_g$ dir.

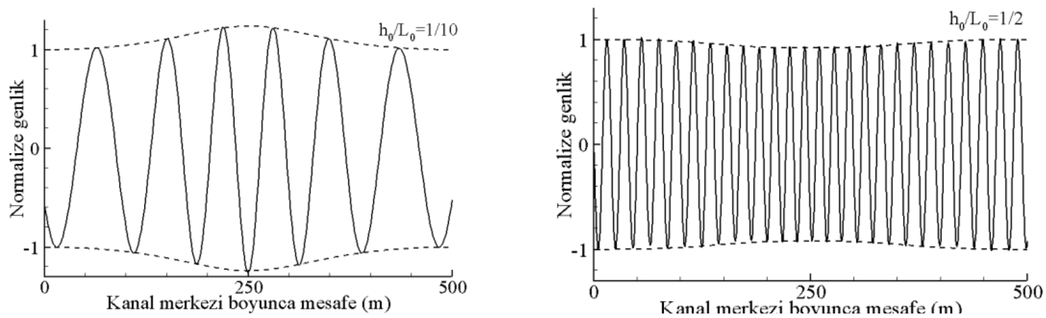
Yukarıdaki denklemden hareketle, dalga ana ilerleme doğrultusu x alınarak ve yatayda y doğrultusunda yalnızca lineer ana terim ζ_{yy} tutularak, KdV denkleminin türetilmesine benzer bir yaklaşımla KP tipi denklemi elde edilir. Denklemin türetilmesine ilişkin tüm ayrıntılar Beji (2018)'de verilmektedir. Böylece elde edilen yeni KP tip denklem aşağıda verilmektedir.

$$\zeta_{xt} + \frac{C_p(1+r)}{2r}\zeta_{xx} - \frac{C_p^2(1-r)}{r\omega^2}\zeta_{xxxt} - \frac{C_p^3(1-r)}{2r\omega^2}\zeta_{xxxx} + \frac{\alpha}{2C_p}(\zeta^2)_{xx}$$
$$-\frac{C_p}{r^2\omega^2}\left[r(1-r)C_{px} - (1+r)C_p r_x\right]\zeta_{xxt} - \frac{C_p}{2r^2\omega^2}\left[2r(1-r)C_{px} - (1+r)C_p r_x\right]\zeta_{xxx}$$
$$+\frac{1}{2r^2}\left[r(1+2r)C_{px} - C_p r_x\right]\zeta_x + \frac{C_p}{2r}\zeta_{yy} = 0 \qquad (4)$$

yukarıda $\alpha = 3g\left(3 - 2r - \omega^2 C_p^2/g^2\right)/2r$ olup, diğer parametreler daha önce tanımlandığı gibidir. Sayısal çözümler için (4) denkleminin ayrıklaştırılması Feng ve Mitsui (1998)'de klasik KP denklemi için önerilen sonlu-farklar yaklaşımıyla yapılmıştır. Ayrıklaştırma ve sınır koşullarının uygulanmasına ilişkin ayrıntılar Beji (2018)'de verilmektedir.

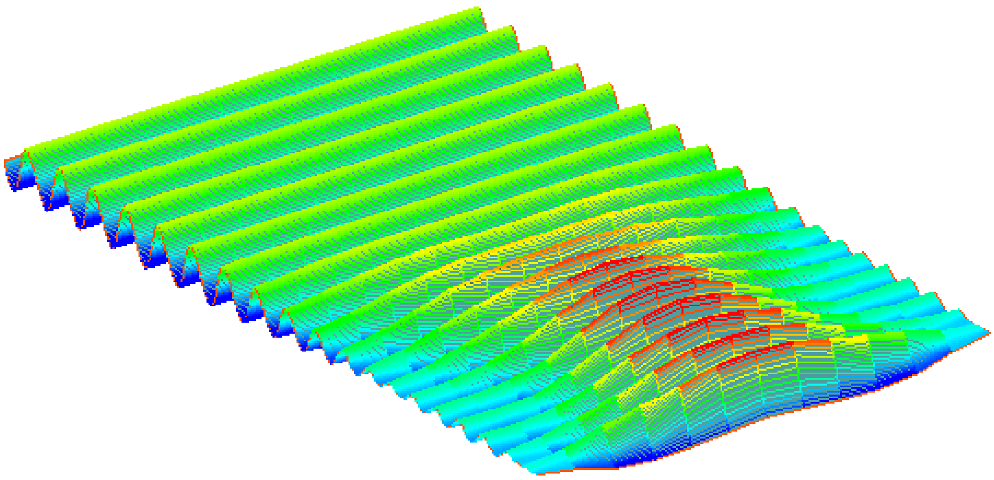
Sonuç ve Öneriler

Kıyı mühendisliğindeki uygulamalar açısından en önemli özellik sığlaşma etkisinin doğru şekilde modellenmesidir. Yeni KP denkleminin bu açıdan performansını göstermek amacıyla iki sayısal benzetim gerçekleştirilmiştir. Sinüs formunda derinliği değişen bir kanalda başlangıç su derinliği $h_0 = 10$ m olup, derinlik sinüs fonksiyonuna uygun olarak kanal ortasında $1/3$ değerine azalmakta $h_m = h_0/3 = 3.33$ m ve daha sonra kanal sonunda tekrar başlangıç derinliği değerine ulaşmaktadır. Bu kanalda yapılan iki sayısal test için periyodlar o şekilde seçilmiştir ki ilkinde kanal başlangıcında $h_0/L = 1/10$ (sığ-orta derinlik) ikincisinde ise $h_0/L = 1/2$ (derin) olmuştur. Bu koşullar altında (4) denklemi ile yapılan sayısal çözümlemeler enerji akısının sabitliği ilkesinden elde edilen zarf eğrileri ile kıyaslanmıştır. Şekil 1'de görüldüğü üzere her iki göreceli derinlik durumu için de sayısal ve teorik değerler birbiriyle oldukça iyi örtüşmektedir.



Şekil 1. Sinüs formunda değişen bir batimetri için dalga genliğinin değişimi. Kesik çizgili zarflar enerji akısının sabitliği ilkesinden hesaplanmıştır. Solda $h_0/L = 1/10$, sağda $h_0/L = 1/2$.

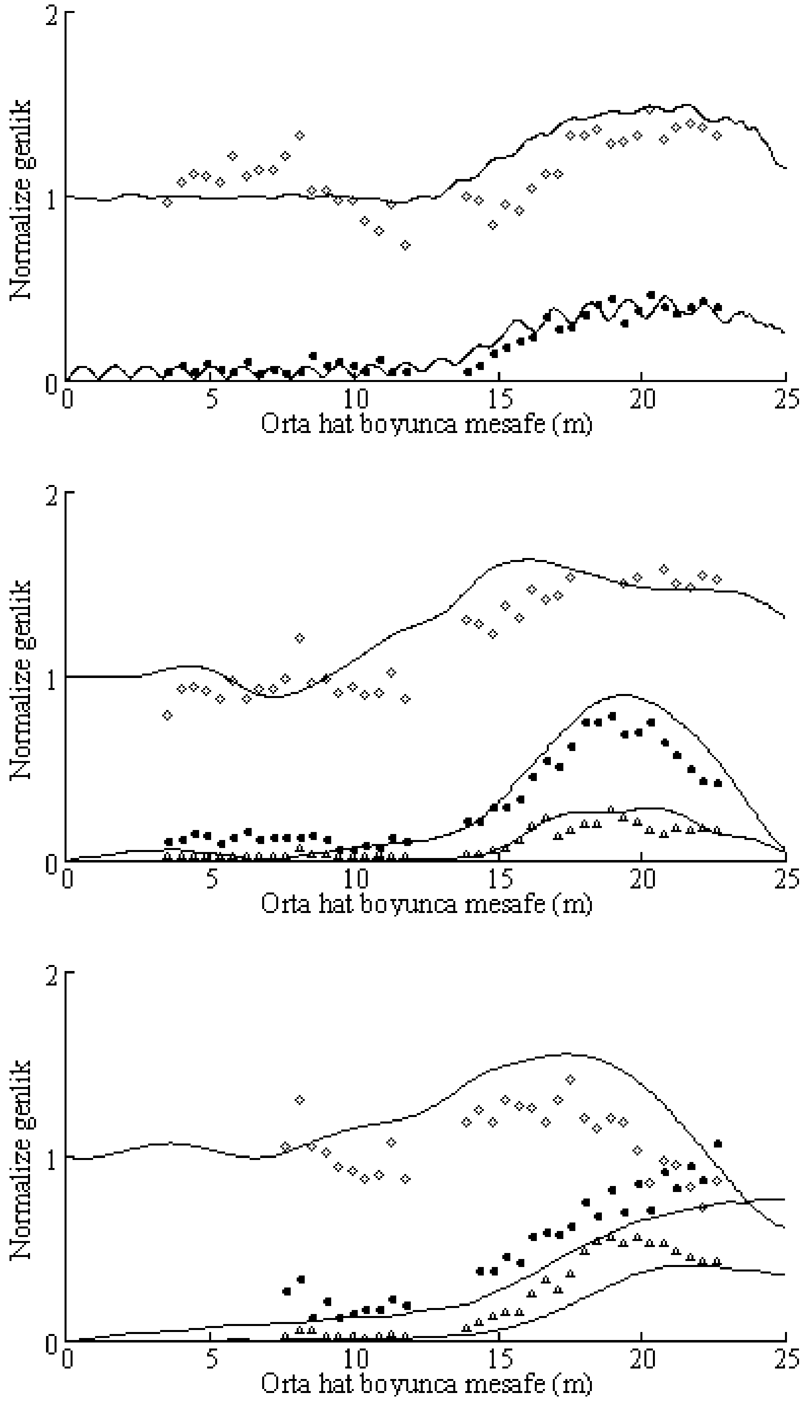
İkinci grup testler Whalin (1971)'in gerçekleştirdiği deneylerle yeni KP denkleminin sayısal çözümünden elde edilen sonuçlara ait kıyaslamalardır. Whalin (1971) yakınsak bir mercek etkisi gösterecek şekilde parabolik adımlarla sığlaşan bir batimetri kullanarak lineer olmayan dalgalarda harmoniklerin değişimlerini ölçtü. Başlangıçta $h_0 = 1.5$ ft = 0.4572 m olan su derinliği parabolik adımlarının sonunda $h_s = 0.5$ ft = 0.1524 m derinliğe sığlaşmaktadır. Batimetrinin matematiksel ifadesi Whalin (1971)'de verilmektedir. $T = 1$ s, $T = 2$s ve $T = 3$ s, periyodlarında düzenli dalgalar için sırasıyla $a_0 = 1.95$ cm, $a_0 = 0.75$ cm ve $a_0 = 0.68$ cm başlangıç dalga genlikleri kullanılarak ölçümler yapılmış ve dalgaların harmoniklerindeki değişimler farklı konumlardaki dalga formu ölçümlerinden elde edilmiştir. Yeni türetilen KP denklemini test etmek amacıyla deneylere uygun olarak her üç periyod için sayısal benzetimler yapılmıştır. $T = 1$ s ve $a_0 = 1.95$ cm başlangıç genliği kullanılarak yapılan sayısal benzetimin 38 periyod sonunda perspektif görünüşünü Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Whalin (1971)'in deneylerinden $T = 1$ s ve $a_0 = 1.95$ cm başlangıç genliği için yapılan benzetime ait perspektif görünüş.

Yeni KP denklemi kullanılarak her üç periyod için yapılan benzetimlerden elde edilen harmonik genlik değerleri ile deney ölçümleri ise Şekil 3'te kıyaslanmaktadır. Hesaplamalarla ölçüm değerleri genel olarak oldukça tatmin edici bir uyum içindedir. Farklı sayısal modellerle yapılan aynı benzetimler göz önüne alındığında yeni KP denkleminin göreceli olarak daha iyiler arasında yer aldığı görülebilir. KP tipi denklem kullanılarak yapılacak benzetimler içinde ise en iyisi olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada yeni bir KP tipi denklem önerilmiş ve bu denklemin sayısal çözümüyle benzetimler gerçekleştirilmiştir. Bu benzetimlerden ilki, yeni denklemin benzerlerinde olmayan sığlaşma özelliğini test etmiş ve enerji akısı ilkesiyle tamamen uyum içinde olduğunu göstermiştir. İkinci benzetim ise yine değişken bir batimetride yakınsayan dalgaların lineer sığlaşma ve lineer olmayan harmonik oluşumu özelliklerini birlikte test etmiştir. Üç farklı periyod değeri için yapılan kıyaslamalar bu testte de yeni KP denkleminin oldukça iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir. Sonuç olarak, yeni KP denkleminin benzerlerinde olmayan özellikleri nedeniyle kıyı mühendisliğinde uygulama alanları bulacağı öngörülmektedir.



Şekil 3. Deneysel ölçümlerle (semboller) yeni KP denkleminin benzetimlerinden elde edilen sonuçların (çizgiler) harmonik genlik değerleri açısından kıyaslanması. Üst: $T = 1$ s, orta: $T = 2$ s, alt: $T = 3$ s.

Kaynaklar

Beji, S. (2018). Kadomtsev–Petviashvili type equation for entire range of relative water depths. *Coastal Engineering Journal*, 60-1, 60-68.

Beji, S., and Nadaoka, K. (1997). A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 453: 319–332.

Boussinesq, J. V. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal Mathematical Pures Applications*, 17: 55–108.

Feng, B.-F., and Mitsui, T. (1998). A finite difference method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 90: 95–116.

Kadomtsev, B. B., and Petviashvili, V. I. (1970). On the stability of solitary waves in weakly dispersive media. *Soviet Physical Doklady* 15: 539–541.

Korteweg, D. J., and de Vries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine,* 5-39: 422–443.

Nadaoka, K., Beji, S., and Nakagawa, Y. (1997). A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 453: 303–318.

Whalin, R. W. (1971). The limit of applicability of linear wave refraction theory in a convergence zone. *Res. Rep. H-71-3, U.S. Army Corps of Engrs*., Vicksburg, MI: Waterways Expt. Station.